民國叢書

第二編
·89·
科學技術史類

中算史論叢

李儼著

上海書店

中算史論叢

（二）

李儼著

序

民國十七年曾將中算史論文之發表於各雜誌者,輯成中算史論叢第一册.其後續輯得二,三兩册,交商務印書館排印.民國二十一年一月二十九日該館被焚,全稿盡失.事後多方搜求,始將各文之散在各雜誌者收集完全,再重加修正,今幸告成.第二册所收者,計有下列各篇:

中國數學史導言(學藝百號紀念增刊,二十二年三月,第一三九至一六〇頁);中算史之工作(科學雜誌第十三卷第六期,十七年六月,第七八五至八〇九頁);二十年來中算史料之發見(科學雜誌第十七卷第一期,第一至一五頁);二十年來中算史論文目錄(國立北平圖書館館刊,第六卷第二號,第五七至六五頁);永樂大典算書(圖書館學季刊,第二卷第二期第一八九至一九五頁);宋楊輝算書考(圖書館學季刊,第四卷第一期,第一至二一頁);東方圖書館善本算書解題(國立北平圖書館館刊,第七卷第一號,第七至一一

頁);明清算家之割圓術研究(科學雜誌第十二卷第十一期,第十二期;第十三卷第一期,第二期,十六年十一月,十二月;十七年一月,二月第一四八七至一五二〇頁,第一七二一至一七六六頁,第五三至一〇二頁,第二〇〇至二五〇頁),李善蘭年譜(清華學報第五卷第一期,第一六二五至一六五一頁).

中華民國二十三年一月二十五日

李儼記於西安

目次

中國數學史導言

目　次

1. 小引

近十餘年來,修治中國數學史事,研求所得,計出版單行本三種,論文三十餘篇.前後凡百數十萬言.而意有未盡,乃復多方探討,時圖整理冀其早成定本.但中算史料尚時有發見,而海內外學者之所貢獻,足備

考訂者,爲事至多.惟以見聞不一,時地限制,所得時復參差.爲徵古今殘佚之典,兼求中外折衷之論,計惟時貢一得之愚,藉獲他山之助.去年十月爲應中華學藝社之約,寫成中國數學史導言一文,隨筆散記,未留原稿。一二八之變,此稿在上海商務印書館印刷者,全成灰燼.今適一週年,重寫此篇,再應學藝百號紀念增刋之徵,尙望海內外通達與以教正是幸.

民國二十一年十月十日記於鄭州

2. 史前結繩之傳說

史前結繩之傳說,見於舊籍者,則:

易繫辭云:「上古結繩而治,後世聖人,易之以書契」.

劉知幾(661-721)史通,「古今正史」稱:「易曰:上古結繩以理,後世聖人易之以書契.儒者云:伏羲氏始畫八卦,造書契以代結繩之政,由是文藝生焉」.

宋祝穆新編古今事文類聚別集卷三三,引書序云:「始造書契,以代結繩之政」.

北堂書鈔卷一二引典論云:「(伏羲立)結繩而治」.

後漢武梁石室像贊云:「伏戲,倉精,初造王業,畫卦結繩,以理海內」.

唐李善文選卷六注引:「莊周曰:昔者軒轅氏,赫胥氏,

尊盧氏,虙戲,神農氏,當是時人結繩而用之.」
是爲史前結繩傳說之一般.前此日本能登,駿河二國,在德川時代[1],及今日北美土人[2],及西藏[3],琉球[4],尙有用之者.

3. 古代數字

易繫辭云:「上古結繩而治,後世聖人,易之以書契」,書契之作,似遠在殷周以前.考釋名云:「契,刻也,刻識其數也」,墨子備城門篇云:「必數城中之木,十人之所舉爲十挈,五人之所舉爲五挈,凡輕重以挈爲人數」.挈假借爲契,十挈五挈卽刻以紀數者,故書契始用於算數.而今之可考者,祇有殷之甲骨文,周秦之金文,及東漢許愼之說文.

一,　二,　三,　四,　五,　六,　七,
八,　九,　十.

殷甲骨文,　一;　二;　三;　亖;　㐅;　∧,∩;十;

(1) 見日本八木奘三郎,滿洲考古學,第508頁日本昭和三年。

(2) 見前書。

(3) 見陳重生,西行豔異記,民國十九年(1930)十一月二十七日時報。

(4) 見日本矢袋喜一,琉球古來之數學,日本大正四年。

)(; 𠂇; 丨;

周秦金文, 一, 二, 三, 亖, 亖,ㄨ;介; 十;

)(; 九; 丨;

許慎說文, 一; 二; 三; 四, ㄨ, 介, 𠂇;

)(; 九; 十.

其積畫不過於五,與算經之說暗合.按孫子算經云:「六不積,五不隻」,夏侯陽算經云:「六不積聚,五不單張」是也.其自五以上各字之意義,許慎以後,小學家意見,極不一致[5].

說文又以弌,弍,弎爲古文一,二,三.唐,宋以後以壹,貳,叁,肆,伍,陸,柒,或漆,捌,玖,拾,佰,仟爲一至千之商業用數字[6].

當時官書亦習用之,作者曾於廣東韶州南華寺見一南漢銅鐘,銘文如下:

「大漢皇帝維大寶七年歲次

甲子,(西元964.)正月一日戊寅,鑄造洪

(5) 參看:丁山,數名古誼,中央研究院歷史語言研究所集刊第一本第一分,第89-94頁,民國十七年(1928)十月廣州.方國瑜,數名古誼,東方雜誌第二十八卷第十號,第83-88頁,民國二十年(1931)五月。

(6) 參看:梁呫廬,字馬考,東方雜誌第二十八卷第十七號第97-100頁,民國二十年(1931)九月。

鍾一口,重銅壹阡貳伯陸

拾斤,於長壽寺,永充供養.」

4. 黃帝隸首作數之傳說

黃帝隸首作數之傳說,實始於世本.劉知幾史通「古今正史」條稱:「楚漢之際,有好事者錄自古帝王公侯卿大夫之世,終乎秦末,號曰世本十五篇」.梁啓超:中國歷史研究法稱:「史學界最初有組織之名著,則春秋戰國間得二書焉,一曰左丘之國語,二曰,不知撰人之世本」.其自注稱:「漢書藝文志著錄世本十五篇原注云:『古史官記黃帝以來迄春秋時諸侯大夫』.漢書司馬遷傳,後漢書班超傳,皆言:『司馬遷删據世本篇目以校遷書,可以知其淵源所自矣.原書宋鄭樵,王應麟尙及見,其佚當在宋元之交.清錢大昭,孫馮翼,洪飴孫,秦嘉謨,茆泮林,張澍,各有輯本,茆,張二家較精審』[7].各家引述世本,時見異文.唐六典卷二十一引世本:隸首造數,宋高承事物紀原卷一數條引世本:隸首作數;宋李籍九章算術音義隸首條引世本黃帝時隸首作數是也.唐釋法琳辨正論注引鄭玄六藝論云:隸

(7) 見梁啓超中國歷史研究法,第21-23頁萬有文庫本。

首作算數,宋范曄後漢書卷十一云:隸首作數,似井本世本之說也.晉張華博物記云:隸首黃帝之臣,一說隸首善算者也[8].其在算經則漢徐岳數術記遺云:「隸首注術,乃有多種」,又謂;「黃帝爲法,數有十等,及其用也,乃有三焉」.後周甄鸞五經算術亦謂:「黃帝爲法,數有十等,及其用也,乃有三焉」.至是黃帝隸首作數之說,始稱完備.故入唐而唐司馬貞史記索隱稱:「隸首作算數」,唐房玄齡晉書稱,「隸首作算數」,唐李賢後漢書馬融傳註稱:「隸首黃帝時善算者也」.漢,唐諸家,雖輾轉傳述,實本於世本之傳說耳.

5. 九九之傳說

西漢以前有關於九九之傳說.如:

管子輕重戊云:「伏羲作九九之數,以應天道」.

呂氏春秋云:「東野有以九九見者,(齊)桓公使戲之曰:『九九足以見乎!』曰:『九九薄能耳,而君禮之,況賢於九九者乎!』」.此外韓詩外傳,三,戰國策,劉向說苑尊賢篇,所記與上文大同小異.

揚雄太玄經云:「陳其九九,以爲數生」.

(8) 其後梁劉昭補註後漢書卷十一引博物記,及宋高承事物紀原卷一引博物記並同。

漢書梅福傳云:「福上書曰:『吾聞齊桓之時,有以九九見者,桓公不逆,欲以致大也,……』」.

三國志魏書二十一云:「……九九不忽於齊……』」.

是則僅舉九九之名也.至九九果爲何物,古今論者有下列諸條:

魏劉徽九章算術序(263)云:「包羲氏……作九九之術,以合六爻之變」.

隋書經籍志有九九算術二卷,楊椒撰.

唐顏師古註漢書云:「九九:若今九章,五曹之輩」.

宋,李籍九章算術音義於劉徽序:「九九之術」條注引前漢書梅福傳,師古註,及隋書經籍志.按顏師古,李籍似并以九九之術爲九章算術之前身.但隋書經籍志內孫子算經三卷,其算法九九,由九九迄一一,似九九又爲專指九九迄一一之算法而言.關於九九歌訣,戰國趙人荀況著荀子,呂氏春秋,漢初淮南王劉安輯淮南子,劉向戰國策,晉王肅輯孔子家語,唐司馬貞史記索隱,唐張守節史記正義并引及之.

1. 荀子: 九九八十一;

六六三十六;

2. 呂氏春秋: 三七二十一;

3. 淮南子: 二八十六;

三三如九, 三四十二, 三七二十一,

三九二十七;

四四十六;

五八四十, 五九四十五,

六六三十六;

又三三而九;

九九八十一, 八九七十二, 七九六十三,

六九五十四, 五九四十五, 四九三十六,

三九二十七, 二九一十八;

4. 戰國策:

卷一, 九九八十一,

卷八, 三七二十一;

5. 孔子家語: 三三如九;

九九八十一, 八九七十二, 七九六十三,

六九五十四, 五九四十五, 四九三十六,

三九二十七, 二九一十八;

6. 史記索隱: 二九十八,

五六三十,

六六三十六;

7. 史記正義: 二七十四, 二八十六,
七七四十九, 八八六十四;

6. 古代數學教育

古代數學教育之見於記載者,有下列各條:

1. 內則云:「六年教之數,與方名,十年出就外傅,居宿於外,學書計」.

2. 白虎通云:「八歲毀齒,始有識知,入學學書計」.

3. 周禮保氏教民六藝,六曰九數.

4. 前漢書食貨志云:「八歲入小學,學六甲,五方,書計之事」.

5. 魏王粲(177-217)儒吏論云:「古者八歲入小學,學六甲,五方,書計之事」.

   見隋虞世南北堂書鈔卷八十三引,及太平御覽(977)卷第六百十三,學部七引.

6. 唐徐堅(659-729)初學記云:「古者子生六歲而教數與方名,十歲入小學,學六甲,書計之事」.

7. 宋王應麟(1223-1296)困學紀聞卷五,儀禮條,釋內則之說,云:「六年教之數與方名,數

者一至十也.方名,漢書(食貨志)所謂五方也.九年教數日,漢志所謂六甲也.十年學書計,六書九數也.計者數之詳十,百,千,萬,億也.漢志六甲五方書計,皆以八歲學之,與此不同」.

古代六歲八歲入學學書計之傳說,雖有異同,而古代之注重小學數學教育,固至明顯也.

7. 算經十書佚文

古代算書之流傳於現代者,首推算經十書.其刊刻則以宋元豐七年(1084)刻本為定本.但其佚文遺義分見於宋代前後記載者,尚可輯錄得若干條,足備考證.

1. 九章算術

魏劉徽九章算經序「……」

宋王應麟玉海卷四十四,及困學紀聞卷四曾引及之.

九章算經李淳風注云舊術求圜,皆以周三徑一為率,若用之求圜周之數,則周少而徑多.徑一周三,理非精密,蓋術從簡要,略舉大綱而言之.今依密率,以七乘周二十二而一,即徑;以二十二乘徑七而一,即周.

上又見宋李誡營造法式(1091)看詳引九章算經

(卷一)李淳風注.

王莽時劉歆斛尺弱於今尺四寸五釐,比魏尺其斛深九寸五分五釐.

上文見晉書卷十六律曆志上,及隋書卷十六律歷志引魏陳留王景元四平劉徽注九章(卷一).

粟率五十,糲米三十,粺二十七,鑿二十四,御二十一.

上文見詩大雅「彼疏斯粺」疏,引九章粟米之法.

粟(率)五十,糲率三十,一斛米得六斛米為糲也.

上文見唐李賢注後漢書卷五十六伏湛傳引九章算術.

玉方寸,重七兩;石方寸,重六兩.

上文見攷工記玉人疏引盈不足術.語見宋王應麟玉海卷四十四,下三條同.

海島邈遠,不可踐量,

上文見禹貢疏引九章算術

穿地四,為壤五,為堅三.

上文見詩緜疏引九章算術

粟率五十　鑿二十四

上文見春秋疏引九章算術

2.　周髀算經

周公問於殷高曰:「寡人聞子大夫善數」

上文見太平御覽(977)卷七百五十,工藝部七引周髀.

周公問於商高曰:聞大夫善數,數安從出.高曰數之法出於圓方,方出於矩.周公曰請問用矩之道.曰平矩以正繩,偃矩以望高,覆矩以測深,臥矩以知遠,環矩以爲圓,合矩以爲方.

上文見元舒天民六藝綱目卷下九數條引周髀.

昔者周公問於商高曰,數安從出.商高曰,數之法出於圓方,圓出於方,方出於矩,矩出於九九八十一.萬物周事,而圓方用焉;大匠造制,而規矩而設焉.或毀方而爲圓,或破圓而爲方,方中爲圓者,謂之圓方;圓中爲方者,謂之方圓也.

上文見宋李誡營造法式(1091)看詳引周髀算經.道光丙戌(1826)聞箏道人營造法式跋稱:可補今本之脫佚.嚴按今本萬物周事至謂之方圓也四十九字在卷上七衡圖之前.

夫天不可階而升.

上文見唐李賢註文選引周髀.

天不可階而升,地不可尺寸而度.

上文見太平御覽卷二十六地部地上引周髀算經.

天圓地方,蓋以寫天,天青黑爲表,丹黃爲裏,故天象蓋覆,中高四旁下也.

上文見隋虞世南北堂書鈔卷一百四十九,天一,天象蓋覆條引周髀.清孔廣陶校注北堂書鈔稱:是本鈔數句,足補算經之闕.

日中樹表,則無影矣.

上文見世說言語篇引周髀,清顧觀光周髀算經校勘記,以爲卽原文「日中立竿測影」下之脫文.

日益南,晷益長.

上文見華嚴經音義四引周髀,清顧觀光周髀算經校勘記以爲卽原文「日益表南,晷日益長」,此表字日字,幷衍.

冬至三光微,夏至三光盛.

上文見太平御覽卷二十三,范子計然內引周髀.清顧觀光周髀算經校勘記以爲卽原文「三光之精微,以成其道遠」內脫文.

3. 孫子算經

十忽爲一絲,十絲爲一毫,十毫爲一釐,十釐爲一分,十分爲一寸,十寸爲一尺,十尺爲一丈,十丈爲一引是.

上文見唐慧琳一切經音義卷二十五,涅槃經第四卷,毫釐條注引孫子算經.

十釐爲分,十分爲寸.

上文見適園叢書本宋彭百川太平治蹟統類卷六引孫子.

凡稱之所起,始於黍.十黍爲一絫.十絫爲一銖,六銖爲一錙.錙部分也,音汾問反.四分爲一兩,十六兩爲一斤,三十斤爲鈞,四鈞爲一石,即一百二十斤也.

上文見一切經音義一百卷,念佛三昧寶王論上卷錙銖條注引孫子九章算經.

量之所起,初起於粟,六粟爲一圭,六十粟爲一撮,六百粟爲一秒,六千粟爲一勺,六萬粟爲一合,六十萬粟爲一升,六百萬粟爲一斗,六千萬粟爲一斛.

上文見一切經音義卷二十五,涅槃經第十卷滿足百斛條注引孫子算經.

十十爲百,十百爲千,十千爲萬,自萬至億有三等,上中下數變之也.

上文見續一切經音義卷二,新大方廣佛華嚴經卷第一,百洛義爲一俱胝條注引孫子算經.

古者積錢上至於天,天不能容,下至於地,地不能載,天

不能蓋地不能載,故名曰載.

上文見太平御覽卷七百五十,工藝部七引孫子算經明陳耀文天中記卷四十一數下載數之極條引同,疑亦出於太平御覽.清孫詒讓札迻卷十一稱:檢今本孫子算經無此語,疑傳錄失之.

4. 夏侯陽算經

算數起自伏羲,而黃帝定三數爲十等.隸首因以著九章,漢備五數云云.五曹孫子,述作滋多.甄鸞劉徽爲之注釋.

上文見宋王應麟玉海卷四四引.

黃帝定三數爲十等,隸首因以著九章,漢備五數.

上文見明陳耀文天中記卷四十一,數下,九數條引.

5. 數術記遺

世人言「三不能比兩」,乃云捐悶與四維.甄鸞注藝經曰:捐悶者周公作.先布本位,以十二時相從.徐援稱捐悶是奇兩之術.三不能比兩者,孔子所造,布十干於其方,戊巳在西南.四維東萊子所造,布十二時四維.

上文見宋王應麟困學紀聞卷九,天道條引數術記遺.玉海卷四四引同.

按太平御覽卷七百五十五,工藝部十二,於揞閦,四維亦有解析.而清杭世駿諸史然疑,後漢書條則以甄鸞注數術記遺謂孔子作三不能比兩,爲離經畔道.玆錄其文如下.

太平御覽卷第七百五十五,工藝部十二,「四維」:

晉李秀四維賦序,四維戲者衞尉贄侯所造也。畫紙爲局,截木爲碁,取象元一,分而爲二,準陰陽之位,擬剛柔之象,而變動無爲生乎其中.

太平御覽卷第七百五十五,工藝部十二,「指於天反閦」:

藝經曰:揞閦先布本位,以十二時相從.文曰,同有文章,虎不如龍豕者何爲,來入兔宮.王孫晝卜,乃造黃鍾.犬往就馬,非類相從,羊奔蛇穴,牛入雞籠.

清杭世駿道古堂外集,諸史然疑,「後漢書」:

東漢崇尙緯讖者,多非聖無法,動引孔子,以實其說,……甄鸞注數術記遺謂:

孔子作三不能比兩,……其離經畔道也至矣.

黃帝爲數,法有十等,億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載.及其用也,有三.謂上,中,下.下數十萬曰億,中數百萬曰億,上數萬萬曰億.

上文見唐慧琳一切經音義二十七卷,引笇經.

黃帝算法經有二十三數,謂一,二,三,四,五,六,七,八,九十,百,千,萬,億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載.從萬已上,有三等數法,其下者十十變之,中者百百變之,上者倍變之.

上文見唐慧琳一切經音義,二十一卷,引黃帝算法.又見明胡應麟少室山房叢集(1593)卷四七引.

上文二條疑出算術記遺.因并列於此.

8. 九章條目

九章條目之見於諸家載記者,有下開各條:

1. 漢鄭衆(約公元83)云:九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,鉤股.

上文見漢鄭玄周禮保氏九數注引,鄭衆周禮注.

按唐孔穎達禮記少儀鄭注九數正義引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,勾股.

唐賈公彥周禮地官大司徒鄭注九數引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,勾股.

宋李昉等太平御覽卷七五〇引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今

有重差,勺桀,勾股.

宋李籍九章算術音義序引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,勾股.

宋邢昺論語七何晏注六藝疏引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要.

宋王應麟玉海卷四四,漢制考卷一,漢藝文志考證九,同引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,勾股.

清馬國翰玉函山房輯周禮鄭司農解詁二引與前同.

2. 漢馬融(約公元166)云:今有夕桀.

上文見唐孔穎達禮記少儀正義引馬融周官傳按唐賈公彥周禮地官保氏鄭注九數引作:

今有重差,夕桀.

清馬國翰玉函山房輯馬融周官傳引與前同.

3. 魏劉徽(公元263)云:九章算術:方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,鉤股.

上文見今本九章算術.

按宋王應麟玉海卷四四,漢制考卷一,及清鄂爾泰等周官義疏十三引並與前同.

4. 晉干寶云:今有夕桀.

上文見唐孔穎達禮記少儀正義引干寶周官禮注.

按淸馬國翰輯周官禮干氏注與前同.

5. 後周沈重云:夕桀.

上文見唐陸德明經典釋文八周禮音義上引沈重周官禮義疏.

按淸馬國翰輯沈重周官禮義疏,與前同.

6. 唐陸德明云:差分,重差,夕桀.

上文見經典釋文及周禮注疏引.

7. 唐長孫無忌云:一方田,二粟米,三衰分,四少廣,五商功,六均輸,七盈朒,八方程,九勾股.

上文見隋書律曆志上,及宋李籍九章算術音義序引.

8. 唐孔穎達云:九數:一方田,二粟米,三差分,四少廣,五商功,六均輸,七方程,八贏不足,九旁要;今有重差,勾股.

上文見孔穎達禮記少儀正義引儒者解.宋王應

麟玉海卷四四,及漢制考卷一引與前同.

9. 唐賈公彥云:九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,勾股.

上文見周禮保氏疏內賈公彥周禮義疏.

按宋王應麟漢制考一引與前同.

宋王應麟玉海四四及漢藝文志考證九引作:

重差,夕桀,勾股.

10. 唐李賢云:九章:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,勾股.

上文見李賢注後漢書卷五四,馬援列傳第十四引.

按宋王應麟漢制考一引馬援傳注與前同.

又玉海四四引馬援傳注作:

商功五,均輸六,盈不足七,方程八.

唐李賢云:九章算術:方田,粟米,差分,步廣,均輸,方程,旁要,盈不足,鈎股.

上文見李賢注後漢書卷六五,張曹鄭(玄)列傳第二五引.

按宋王欽若等册府元龜八六九明算引作:

方田,粟布,差分,少廣,均輸,方程,旁要,盈不足,鈎股.

宋王應麟玉海四四及漢制考——引鄭玄傳注作:方田,粟米,差分,少廣,均輸,方程,旁要,盈不足,鈎股.

11. 唐李林甫唐六典注云:九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要.

上文見唐六典卷二一,算學博士注引.

12. 唐白居易,宋孔傳云:九數:乘除之術凡九篇:一曰,方田,以度田畝;二曰,算粟,以制變易;三曰,衰分,以辨隆殺;四曰,少廣,以求積冪;五曰,商功,以計功程;六曰,均輸,以量遠近;七曰,盈不足,以較盈減;八曰,方程,以御正負;九曰,鈎股,以測高遠.

上文見唐白居易,宋孔傳,白孔六帖卷三十三,算十引.

按明陳仁錫潛確類書卷八一引孔帖與前同.

13. 宋陳彭年等廣韻云:九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要.

上文見廣韻卷四.十遇韻,數字注.

14. 宋高承云:方田,粟布,差分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,勾股.

上文見事物紀原卷一引.

15. 宋李石云:九章算法:方田,粟米,差分,少廣,均輸,方

程,旁要,盈(不)足,鈎股.

上文見李石續博物志卷九引.

16. 宋秦九韶云:九章:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,鈎股;附重差,夕桀.

上文見宋,秦九韶數學九章(1247)引.

17. 宋楊輝云:九章算法:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,鈎股;附旁要.

上文見宋楊輝詳解九章算法(1261)引.

元明以後九章條目,多因通行本九章算術篇目,其有互異之處,略引數條以見例.

18. 元托托等宋史律曆志云:九章:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,盈朒,旁要.

上文見宋史卷六八,律曆志二一,引.

19. 元馬端臨文獻通考云:九章:方田,算粟(一本作算米),衰分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,勾股.

上文見文獻通考卷二二九引.

20. 明姚廣孝等永樂大典(公元1407)云:方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈不足,勾股.

上文見永樂大典目錄.

21. 明焦竑云:九章算法:方田,粟米,差分,少廣,均輸,方

程,傍要,盈不足,鈎股.

上文見明焦竑輯焦氏說楛卷三引.

22. 明徐袍云:九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,贏朒,方程,鈎股.

上文見明徐袍事典攷略卷二,或周學制條引.

23. 明吳敬九章比類(1450)云:方田,粟米,衰分,少廣商功,均輸,盈不足,方程,勾股.

上文見九章詳註比類算法大全目次.

按吳敬同書乘除開方起例引九章名義作:方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,勾股.

24. 明程大位算法統宗(1593)云:九章:方田,粟布,衰分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,勾股.

上文見算法統宗目次.

25. 明陳仁錫云:九數:方田,粟布,衰分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,勾股.

上文見明陳仁錫潛確類書卷八一,崇禎三年(1630)刻本.蓋本算法統宗其後明李篤培中西數學圖說(1630),清梅瑴成增删算法統宗所引並與前同[9].

(9) 參看:孫文青九章算術篇目考(上)金陵學報第二卷,第二期,第1-43頁,民國二十一年(1932)十一月.

9. 魏劉徽注九章

魏劉徽撰注九章算術,其見於唐人記載者:

唐李賢後漢書馬援列傳注云:劉徽九章算術,方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,鈎股.

宋王應麟玉海卷四四引同.

隋書律歷志云:「魏陳留王景元四年(263)劉徽注九章云:王莽時劉歆斛尺弱於今(魏)尺四分(原誤作寸)五釐,比魏尺其斛深九寸五分五釐」.

上文見隋書卷十六,律歷志第十一,律歷上.

隋書律歷志又云:「魏陳留王景元四年(263)劉徽注九章商功曰:當今(魏)大司農斛圓徑一尺三寸五分五釐,深一尺,積一千四百四十一寸十分之三」.

上文見隋書卷十六,律歷志第十一,律歷上.

「蓋 $\frac{1}{2}\times 13.55=6.775$ 寸 (半徑)

$(6.775)^2=45.900625$ 方寸 (半徑冪)

$\pi = 3.14$ (徽率)

則 $10\pi(6.775)^2=1441\frac{3}{10}$ (魏斛容積)」

隋書律歷志又云:「王莽銅斛於今(魏)尺深九寸五分五釐,徑一尺三寸六分八釐七毫,以徽率計之,於今(魏)斛爲容九斗七升四合有奇.此魏斛大而尺長,王

莽斛小而尺短也.

上文見隋書卷十六,律歷志第十一,律歷上.

「蓋　　王莽銅斛徑 $=14.332136$ 寸

$$(0.55)(14.332136)=13.687\text{寸}\quad(\text{內徑})$$

$$\frac{1}{2}\times13.687=6.8435\text{寸}\quad(\text{半徑})$$

$$(6.8435)^2=46.83349225\text{方寸}\quad(\text{半徑冪})$$

$$\pi=3.14\quad(\text{徽率})$$

則 $$10\times0.955\pi(6.8435)^2=1404.3959.\quad(\text{王莽斛容積})$$

* * *

$$\frac{\text{王莽斛容積}}{\text{魏斛容積}}=\frac{1404.3959}{1441\frac{3}{10}}=0.974^{+}$$

10. 南宋祖冲之著綴術

唐長孫無忌隋書卷十六,律歷志卷十一云:

「……古之九數,圓周率三,圓徑率一,其術疏舛.自劉歆,張衡,劉徽,王蕃,皮延宗之徒,各設新率,未臻折衷.宋末南徐州從事史祖冲之更開密法,以圓徑一億爲一丈,圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽;朒

數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽,正數在盈朒二限之間.密率圓徑一百一十三,圓周三百五十五,約率圓徑七,周二十二.又設開差冪,開差立,兼以正圓參之,指要精密,算氏之最者也.所著之書,名爲綴術.學官莫能究其深奧,是故廢而不理」.

「蓋 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$

$$\pi = 3.14159265,$$

$$\pi = \frac{355}{113},$$

$$\pi = \frac{22}{7}.$$
」

$\frac{355}{113}$ 率,尋常稱爲安托尼兹(Adriaen Anthonisz,十六七世紀時人)率[10].

隋書卷十六嘉量條,晉書卷十六嘉量條幷稱:「周禮桌氏爲量.鬴深尺,內方尺,而圜其外,其實一鬴.……祖冲之以算術考之,積凡一千五百六十二半方寸,而圜其外,減傍一釐八毫,其徑一尺四寸一分四毫七秒二忽有奇,而深尺,卽古斛之制也」.

(10) 見 Smith, D. E. 著, 鄭太朴譯, 圓周率 π 之歷史及其超越性,第 113 頁萬有文庫本,

「蓋 $\frac{1}{2}\times 14.10472=7.05236$ (半徑)

$(7.05236)^2=49.7357815696$ (半徑冪)

$\pi=3.14159265$ (祖冲之率)

$10\pi\times(7.05236)^2=1562.47915391993122344$

$=1562.5$(立)方寸 (容量)」

其校劉歆斛銘,亦用祖冲之率, $\pi=3.14159265$.

祖冲之綴術,曾爲唐代學官所選用,故其圓率亦爲世人所習知,時見引用.如隋書卷十六,載後周武帝保定元年玉斗:「內徑七寸一分,深二寸八分……今若以數計之,玉升積玉尺一百一十寸八分有奇,斛積一千一百八寸五分七釐三毫九秒」.

「蓋 $\frac{1}{2}\times 7.1=3.55$寸 (半徑)

$(3.55)^2=12.6025$平方寸 (半徑冪)

$\pi=3.14159265$ (祖冲之率)

$10\times 2.8\pi(3.55)^2=1108.5737984055$

$=1108.5739.$(?)立方寸 (容量)

祖冲之造綴術,其子繼之,其見於記載者,有下開各條.

綴述數十篇,祖冲之造,……………………………(南史)

綴術六卷,口口撰,…………………………(隋書經籍志)

綴術六卷,口口撰,……………………(日本見在書目錄)

綴術五卷,祖冲之撰,李淳風注,……(舊唐書經籍志)

綴術五卷,祖冲之撰,李淳風釋,…… ……………(新唐書)

綴術六卷,祖冲之撰,……………………………(通志略)

綴術五卷,祖冲之撰,…………(宋李籍周髀算經音義)

綴術口口,祖暅之,……………(王孝通上緝古算經表)

綴術二卷,祖暅,………………………(沈括夢溪筆談)

其於九章.海島,據日本見在書目錄所載,有:

九章九卷,祖中注,

九章術義九卷,祖中注,

海島二卷,祖仲注,

疑幷爲祖冲之所撰,因南史曾稱祖冲之注九章也.

綴術一書,在國中則亡於宋天聖之頃,在日本則與梅文鼎同時之關孝和似曾見及,但亦已成一段疑案.相傳日本關孝和(1642-1708)於奈良得一算書,學乃大進,其遺著括要算法多採中法,據岡本則錄且稱當時梶山,主和次俊尙藏有祖冲之之綴術,今書亦散亡,眞僞不可得知.[11]

(11) 見三上義夫,圓理ノ發明ニ就テ,東京物理學校雜誌第472,473,474,475,號別刷。(1930.)

隋書所記祖冲之率一段記事,宋王應麟玉海卷四十四,曾引及之.今百衲本二十四史元大德丙午(1306)刋本隋書亦記此文.西人 Van Hee 疑爲明末西算輸入後之僞作,識者已議其非.(12)

11. 後周甄鸞注算經

甄鸞撰注算經,各書所載,互有詳略,茲引列如下,以備攷證.

九章

九章算經九卷,甄鸞撰,……………………(舊唐書)

九章算術二卷,徐岳撰,甄鸞重述,……………(通志)

九章算經二十九卷,徐岳,甄鸞等撰…………(通志)

孫子

孫子算經口卷,甄鸞注,………………(一切經音義)

孫子算經三卷,甄鸞撰注,…………………(舊唐書)

孫子算經三卷,甄鸞撰,李淳風注,………(新唐書)

孫子算經三卷,甄鸞撰,李淳風注,………(通志略)

---

(12) 見三上義夫.日本中等教育數學會第十三回總會陳列關於和算書籍允許狀等之解說,內:「隋書律歷志中祖冲之圓周算法之記事」,1931.

Mikami, Y. The Ch'ou-Jeu Chuan of Yüan Yüan-Isis No. 35, (Vol. XI) Sept. 1928, Bruges, (Belgium).

五曹

五曹算經五卷,甄鸞撰,……………………(舊唐書)

五曹算經三卷,甄鸞撰,……………………(舊唐書)

五曹算經五卷,甄鸞撰,……………(日本見在書目)

甄鸞五曹算經五卷,…………………………(新唐書)

甄鸞五曹算經五卷,…………………………(通志略)

甄鸞五曹算術二卷,……………………………(宋史)

李淳風注,甄鸞五曹經算一卷,………………(宋史)

張丘建

張丘建算經一卷,甄鸞撰,…………………(舊唐書)

張丘建算經三卷,甄鸞注,………(直齋書錄解題)

張丘建算術三卷,甄鸞注,李淳風注釋,劉孝孫細草

……………………………………………………(通考)

夏侯陽

夏侯陽算經三卷,甄鸞注,…………………(舊唐書)

周髀

周髀一卷,甄鸞重述,……………………(隋書通志)

周髀一卷,甄鸞注,………………………(舊唐書)

周髀算經二卷,趙君卿注,甄鸞重述,李淳風等注釋

……………………………(崇文總目及中興館目)

周髀算經二卷,趙君卿注,甄鸞重述,李淳風等注釋
……………………………………(玉海及通考)

五經

甄鸞五經算術一卷,…………………………(通志略)

五經算術二卷,甄鸞注,李淳風注釋,(玉海引書目)

甄氏五經算術,…………(元程瑞禮,讀書分年日程)

紀遺

數術記遺一卷,徐岳撰,甄鸞注,……………(舊唐書)

甄鸞注,徐岳大衍算術注一卷,………………(宋史)

三等數

三等數一卷,董泉撰,甄鸞注,……………(舊唐書)

海島算經

海島算經一卷,甄鸞撰,李淳風等注釋,……(玉海)

甄鸞算術

甄鸞算術云:周朝市尺,得玉尺九分二釐,…(隋書)

甄鸞算術云:玉升一升,得官斗一升三合四勺……
…………………………………………………(隋書)

12. 唐代印度數名輸入中國

印度數名由佛經連帶輸入者,在唐于闐國三藏沙門實叉難陀譯大方廣佛華嚴經有一百二十數,唐

慧琳一切經音義於此經「一百洛叉爲一俱胝」條註稱:「今案此經十,百,千,萬,十十變之;從萬至億,百倍變之;從億已去,皆以能數量爲一數,復數至與能數量等」,其在俱舍論有六十數,遼希麟續一切經音義稱:「慈恩法師,引俱舍說本數六十,傳失其八」.

其名義各經亦有異譯,如:

洛叉亦作洛沙,

俱胝亦作拘胝,俱知,俱致,

阿庾多亦作那由他,

那由他亦作那,那由多,

矜羯羅亦作薑羯羅,

迦羅亦作哥羅,緊迦羅,

阿僧祇亦作阿僧企耶,是也.

其言小數,則:

大般若波羅密多經卷四,有:鄔波尼殺曇分,

大方廣佛花嚴經卷中,作:優波尼沙陀分,

大波羅密多經卷四,作:鄔波尼殺曇分,

言分至極小分也.

13 元代回回算法輸入中國

元王士點商企翁元祕書監志十一卷,所記自至

元至至正,凡秘書建置遷除,典章故事,一一備載,司天監亦附錄焉.其卷七回回書籍,在至元十年(1273)者計有:

兀忽列的四擘算法段數十五部,

罕里速窟允解算法段目三部,

撒唯那罕答昔牙諸般算法段目并儀式十七部,

呵些必牙諸般算法八部.[13]

14. 明清之際西洋算法輸入中國

明末西算輸入首賴利瑪竇(Metteo Ricci 1552-1610).利瑪竇以萬歷九年(1581)來華,抵香山澳.[14]萬

(13) 見南京國學圖書館藏舊鈔本元王士點,商企翁祕書監志卷七.

并據倉聖大學學術叢編卷七景元鈔本校過.

(14) 主萬歷八年(1580)來華者,有:正教奉褒,天主教傳行中國考第108-頁.

主萬歷九年(1581)來華者,有:明史,不得已辯,澳門紀略.艾儒略大西利先生行蹟.

主萬歷十年(1582)來華者,有:「利瑪竇,湯若望二君傳略」,格致彙編第五年冬季冊(1890).

Brucker, J., Catholic Encyclopedia, vol. 13, pp. 34 et seq. New York, c. 1909-1913; Abel-Remusat, Nouveau melanges asiatiques, vol 2. p- 207, Paris, 1829; Lettres edifiantes, vol. 3, p. 2, Paris, 1843.

歷二十七年(1599)曾一度到北京,又折回南京.(15)時徐光啓(1562-1633)聞利瑪竇名,特來南京問道.(16)二十九年(1601)入北京遂居焉.(17)萬歷三十八年(1610)卒於北京.(18)在京於傳敎之外,譯著算書,計有:

幾何原本前六卷,徐光啓,利瑪竇同譯.萬歷三十五年(1607)在京出版.此書疑出於 Clavius(1537-1612),Euclidis Elementorum Libri XV, 1517.

圜容較義,李之藻(?-1631),利瑪竇同譯,此書疑出於 Clavius, Trattato della figura isoperimetre. 書前有萬

---

(15) Purchas, His pilgrimes, vol 3, p. 339, London, 1625. Serriere, Les anciennes missions de la Compagnies de Jesus en Chine (1552-1814) Shanghai, 1924.

(16) 徐宗德,明末淸初灌輸西學之偉人, p. 6, 上海,民國十五年(1926).

Huc, Christanity in China, Tartary and Thibet, vol 2, p. 142 London, 1857-1858.

(17) 明史,澳門紀略,

William, S. Wells, The middle kingdom, vol 2. pp. 289-295. Rev. edition, New York, 1883.

Purchas, His pilgrimes, vol. 3, pp. 354-358、London, 1625.

(18) 明史,澳門紀略,徐光啓題幾何原本再校本;徐光啓簡平儀序,西洋新法算書.

Huc, Christanity in China, Tartary and Thibet, vol. 2, pp. 213-220, London, 1857-1858. Purchas, His pilgrimes, vol 3, p. 407, London, 1625.

歷甲寅(1614)李之藻序,稱殺青於戊申(1608)十一月

同文算指前編二卷,通編八卷,李之藻,利瑪竇同譯.此書疑出於Clavius, Epitome Arithmetiae Practicae, Rome, 1583.前編有李之藻萬歷癸丑(1613)序徐光啓萬歷甲寅(1614)序.

乾坤體義三卷,利瑪竇撰(19).

測量法義,徐光啓,利瑪竇同譯.

而徐光啓因亦有測量異同,鈎股義.孫元化有幾何用法(1608).至利瑪竇萬歷庚戌(1610)卒後,西士來者漸衆.徐光啓(1562-1633)以崇禎二年(1629)爲始,督修歷法,西士入局者,有:龍華氏(Nicolas Longobardi, 1597來華, 1559-1654),鄧玉函(Jean Terrenz, 1621來華, 1576-1630),湯若望(John Adam Schall von Bell, 1622來華1591-1666),羅雅谷(Jacques Rho 1629來華, 1593-1638)於是辛未(1631)進歷書二次,第一次二十四卷,第二次二十卷,并一摺,壬申(1632)三次進書三十卷.翌年徐光啓(1562-1633)逝世,遺摺以李天經(1579-1659)自

(19) 式訓堂叢書本拜經樓藏書題跋記(1847)卷四有法界標旨,乾坤體義二種合爲一册,釋智貴輯,虞淳校梓,明萬歷間余永寧重刻而序之.書各三卷.

代,時則曆書大體已具,而算學中之筆算,籌算,幾何,三角術,三角函數表,及割圓術,幷從曆書中連帶輸入矣惟新法迄明亡(1644)迄未實行.

清聖祖留心曆算,其先後入宮教授算學者,有:南懷仁(Ferdinard Verbiest, 1659 來華, 1623-1688),張誠(J.-Fr. Gerbillon, 1654-1707),安多(Antoine Thomas, 1644-1709),白晉(Joachim Bouvet, 1656-1730),巴多明(Dominique Parrenin, 1665-1741)杜德美(Pierre Jartoux, 1670-1720.11-30)等,幷有將算書譯成滿文及漢文者.現北平故宮博物院圖書館藏七卷本幾何原本一種,裴化行氏(Henri Bernard)疑其出於 Pardies Practical Geometry,同時故宮博物院圖書館又藏有幾何原本七卷一册,鈔本有序,附算法(原本)一卷,有序.又國立北平圖書館藏有孔繼涵(1739-1783)舊西算鈔本四種.計有:

幾何原本七卷二册,內缺第六卷一册,

測量高遠儀器用法無卷數,比例規解無卷數,八線表根無卷數,合一册

句股相求之法無卷數一册.

借根方算法節要上下卷一册.

以上所舉三種鈔本七卷本幾何原本文句互有不同,蓋其譯本曾幾經校勘也.關於西士入宮教授,及幾何原本七卷本譯述之經過,Du Halde 中國書志第四卷第二九五頁,所載有一六九〇年一月二十七日張誠(Gerbillon)氏日記一則,今轉於下:

"Le 27. Ayant achevé d'expliquer la geometrie practique avec les demonstrations, l'Empereur déclara qu'il vouloit recommencer a lire les élémente de géométrie que nous lui avions expliquer en langue Tartare: & comme il les fait traduire en chinois, il dit qu'on lui aporteroit tous les jours quelque propositions de la traduction, qu'il la reverroit avec nous & la corigeroit lui- même; & qu'après avoir corigé la version chinoise, il reverroit encore la texte Tartare: que cependant nous continuerions à venir tour à tour au palais le P. Bouvet (白晉) & moi,"

* * *

清聖祖於編纂律歷淵源(1723刻)之前,蓋深致力於西算.現北平故宮博物院圖書館藏有:

幾何原本十二卷四册無序,附算法(原本)二卷無序(懋勤殿,洪五九二,16號).疑爲數理精蘊本之底本,因其

字句略有更改也,例如:

洪五九二,16

幾何原本十二卷,無序

卷一,

第一.

『凡論數度,必「先」始於一點.自點引之而爲線,自線廣之而爲面,自面積之而爲體.是名三大綱.是以有長而無闊者,謂之線.有長與闊而無厚者,謂之面.長與闊厚俱全者,謂之體.「只有一」(惟)點「併」無長闊厚薄「者」,其間不能奇分,「故」不可以數度.然線之兩端「又俱係」(卽)點,(而線面體,皆由此生),點雖不「能」入於數,實(爲)衆數之本.』

* * *

上文作「……」者,在數理精蘊已省去.作(……)爲數理精蘊增多之字.附算法原本二卷,無序

算法原本卷一

第一.

『「夫」一者數之原也.衆一相合,而數繫焉.「然」不能無大小多寡之不齊.而欲知其所以分合之故,必有一定之法,始可以考其準「耳」.若夫累積小數與大數

等者,此小數卽度盡大數之準也.如大數有八,小數有二,四倍其二,與八必等,則二卽爲度盡八之準.苟累積小數,不能與大數等者,此小數卽非度盡大數之準也.

....

* * *

上文作「......」者,在數理精蘊已省去.

主編纂律曆淵源 (1723 刻) 者有何國宗,梅瑴成(1681-1763),而明安圖,顧陳垿(1678-1747)亦在攷測之列.此時代數學及割圓術中解析法幷連帶輸入.明清以來西算輸入至此乃告一段落.

雍正二年 (1729) 有放逐教士之舉,惟仍留教士之有數學知識者在曆局服務.在曆局者,乾隆三十四年(1769)有彌納和,乾隆五十三年(1788)有 Raux,道光十八年(1838)有 Prics 過此便無西教士之足跡矣.

中算史之工作

吾國向乏中算專史,而大部材料,往往於通史中尋其斷片.卽清阮元所作疇人傳 (1799) 亦大半取材於二十四史.在前則宋景德二年 (1005) 敕撰册府元龜一千卷,其卷八百六十九,總錄部一百一十九,"明算"條稱:

「自隸首作籌,容成造歷,後之學者,不絕英華;或妙盡其能,或略盡其理,忘寢廢食,精鶩心游,耳不聞於雷霆,行或墜於坎窞.嘗齧齕而耽味,射隱伏以宴符,小則括毫釐之形,大則周天地之數,聊屈指而洞明,運隻筯而無爽,若非苦志名山,尋師遠道,則何以臻此哉.」

其後又附載各家小傳,是爲中算史之嚆矢.

而元祖頤:松庭先生四元玉鑑後序,稱:

「平陽蔣周撰益古,博陸李文一撰照膽,鹿泉石信道撰鈐經,平水劉汝諧撰如積釋鎖,絳人元裕細草之,後人始知有天元也.平陽李德載因撰兩儀羣英集臻,兼有地元;霍山邢先生頌不高弟劉大鑑,潤夫撰乾

坤括囊,未僅有人元二問;吾友燕山朱(世傑)漢卿先生演數有年,探三才之頤,索九章之隱,按天地人物,立成四元, 書成名曰四元玉鑑.」

明程大位算法統宗(1593)卷末,"算經源流"條,稱:

宋元豐七年(1084)刋十書入祕書省,又刻於汀州學校.

黃帝九章 周髀算經 五經算法 海島算經
孫子算法 張丘建算法 五曹算法 緝古算法
夏侯陽算法 算術拾遺

元豐,紹興,淳熙以來,刋刻者多,且以見聞者著之:

議古根源 益古算法 證古算法 明古算法
辨古算法 明源算法 金科算法 指南算法
應用算法 曹唐算法 賈憲九章 通微集
通機集 盤珠集 走盤集 三元化零歌 鈐經
鈐釋

嘉定,咸淳,德祐等年又刋各書:

詳解黃帝九章 詳解日用算法 乘除通變本末
續古摘奇算法 已上俱出楊輝摘奇內.

……………………………………………………

其事又往往不著於史.則二十四史所遺留科學史料,蓋亦僅矣.

直至清阮元(1764-1848)始有疇人傳之作.乾隆乙卯(1795)阮元與李銳(1798-1817),周治平共撰此書,至嘉慶己未(1799)畢業,一時明算若錢大昕(1728-1804)丁杰(1738-1807),凌廷堪(1755-1809),談泰,焦循(1763-1820),并爲印正.編中明以前諸疇人各傳,除採二十四史傳志外,所引歷算書及他類書籍有:

山海經 文選 藝文類聚 開元占經 五代會要 玉海 四庫全書總目 癸辛雜識 景定建康志 李梅亭集 齊復謙郭太史行狀 明史稿 明史紀事本末 荆川文集 續學堂文鈔 浙江通志 嘉興府志 蘇州府志

算經十書 數學九章 算法統宗 測圓海鏡 益古演段 算法全能集 測圓海鏡分類釋術 測圓算術 句股算術 弧矢算術 新法算書 圜容較義 同文算指 幾何原本 測量異同 句股義 度測 新儀象法要 革象新書 回回歷法 太陰通軌 七政推步 授時歷法撮要 歷宗通議 周相大統歷法 歷法新書 聖壽萬年歷 律歷融通 古今律歷考 歷體略

其清代疇人各傳引用書目,可於下表見之.

第一表

姓名	引用書名
* 王錫闡	四庫全書總目，曉庵新法，王寅旭先生遺書，道古堂文集
潘聖樟	王寅旭先生遺書，道古堂文集.
* 薛鳳祚	天學會通
楊光先	不得已，池北偶談.
胡亶	中星譜.
游藝	四庫全書總目，天經或問.
揭暄	四庫全書總目，梅氏全書.
* 方中通	數度衍.
* 杜知耕	幾何論約，數學鑰，道古堂文集.
* 李子金	四庫全書總目，池北偶談，數學鑰.
* 李長茂	勿庵算書目.
徐發	天元曆理.
* 黃宗羲	浙江通志，南雷文約.
子* 黃百家	勾股矩測解原，勿庵算書目.
* 梅文鼎	四庫全書總目，梅氏全書．梅氏叢書輯要，勿庵書目，道古堂文集，錢（大昕）少詹說.
子* 梅以燕	道古堂文集，增删算法統宗.
孫* 梅瑴成	梅氏叢書輯要，增删算法統宗，道古堂文集.
曾孫* 梅鈖	增删算法統宗.
曾孫* 梅鈁	增删算法統宗.
弟* 梅文鼐	道古堂文集.
弟* 梅文鼏	道古堂文集，中西經星同異考，梅氏書目.
李光地	曆象本要，切問齋文鈔.
子 李鍾倫	道古堂文集.
弟 李鼎徵	道古堂文集.
弟 李光坡	切問齋文鈔.
秦文淵	四庫全書總目.
張雍敬	曝書亭集，道古堂文集.
* 孔興泰	道古堂文集.
* 袁士龍	測量全義新書，道古堂文集.

* 毛乾乾	道古堂文集.
女壻*謝廷逸	道古堂文集.
* 沈超遠	道古堂文集.
* 年希堯	測算刀圭，面體比例便覽，對數表，對數廣通.
劉湘煃	識學錄.
* 陳萬策	切問齋文鈔，梅氏叢書輯要.
* 楊作枚	梅氏全書.
* 陳厚耀	四庫全書總目，春秋長曆，增刪算法統宗，陳氏家譜. 召對紀言.
惠士奇	潛研堂文集.
* 陳　訏	句股引蒙，句股述.
* 陳世仁	少廣補遺.
* 莊亨陽	莊氏算學.
* 顧長發	四庫全書總目.
* 屠文漪	九章錄要.
邵昂霄	四庫全書總目.
許伯政	四庫全書總目，全史日至源流.
* 余　熙	四庫全書總目.
顧　琮	御定考成後編，四庫全書總目.
* 何國宗	大清會典則例，梅氏叢書輯要，錢（大昕）少詹說.
* 丁維烈	赤水遺珍.
張永祚	杭州府志，道古堂文集，漢書疏證.
* 王元啓	惺齋雜著，句股衍.
* 江　永	數學，五禮通考，戴氏遺書.
* 戴　震	戴氏遺書，算經十書.
盛百二	尙書釋天.
* 錢　塘	潛研堂文集.
李　惇	焦里堂：李孝臣先生傳.
* 吳　烺	周髀算經圖注.
褚寅亮	錢少詹說.
* 屈曾發	九數通考.
* 龔　淪	述古適.
厲之鍔	菘緯瑣言.

表中凡有算學著作或說述者,幷作星點爲誌,後做此.

道光二十年(1840)羅士琳續疇人傳由卷四十七至五十二凡六卷.其卷四十七楊輝,元好問,蔣周,朱世傑,趙城諸人傳記,則用下列各書:

楊輝算法;金史元好問本傳,金詩源,堯山堂外紀,郝經遺山墓銘,遺山年譜,四元玉鑑;益古演段;算學啓蒙,赤水遺珍.

其清代疇人各傳引用書目,於下表見之.

第二表

姓名	引用書名
* 明安圖	割圜密率捷法,衡齋算學,董方立遺書.
子* 明新	上書
* 陳際新	上書
* 張肱	上書
* 孔廣森	顨軒孔氏所著書,漢學師承記,校禮文堂集.
* 博啓	句股容三事拾遺,方(履亨)監正說.
許如蘭	乾象拾遺,春暉樓集.
陳懋齡	算學天文考,雕菰樓文集,求己堂集,董方立遺書.
范景福	上書
錢大昕	錢氏叢書,四史朔閏考,地球圖說,漢書師承記,經韻樓文集..
姪 錢侗	四史朔閏考.
* 淩廷堪	校禮堂文集,漢學師承記,揚州畫舫錄.
* 李潢	九章細草圖說,輯古算經考注.
* 程瑤田	通藝錄,漢學師承記.
* 李銳	李氏遺書,知不足齋叢書,潛研堂文集,十駕齋養新錄,句股算術細草,揅經堂文集,通藝錄,雕菰樓文集,漢學師承記.
* 黎應南	上書.

*談泰	鄭司農年譜，經義叢鈔，潛研堂文集，雕菰樓文集，
*汪萊	衡齋算學，通藝錄，漢學師承記，雕菰樓文集，研六堂文集．
徐朝俊	高厚蒙求，藝海珠塵．
*梅沖	句股淺述．
*焦循	里堂學算記，雕菰樓文集，揅經堂文集，漢學師承記，揚州畫舫錄．
子*焦廷琥	事略，雕菰樓文集．
楊大壯 附	上書．
*許桂林	宣西通，算牖，晉子注釋．
周治平 附	上書．
吳蘭修	學海堂二集，緝古算經考注．
*董祐誠	董方立遺書．
張成孫 附	上書．
*張敦仁	緝古算經細草，求一算術，開方補記．
姚文田	邃雅堂學古錄，皇清經解經義叢鈔一千三百八十三，求己堂集．
施彥士 附	上書．
*戴敦元	九章算術細草圖說．
*陳潮	綴術輯補，徐(松)禮部說．
*張作楠	翠微山房歷算叢書．
*劉衡	緝古算經考注、循吏劉公傳，行狀，六九軒算書．
*謝家禾	謝穀堂算學三種．

時則阮元在家食俸尙爲製序.(1840)

由道咸迄同光又數十年,此期疇人輩出,宜當續傳.而李善蘭,張文虎,吳嘉善,均熟知中算界掌故,皆驚於李銳,羅士琳之名,未敢續成.華蘅芳曾於學算筆談,"論疇人傳必須再續"中,深論其事.并附其弟世芳近代疇人著述記.此記所引凡二十八人,附見者五人,凡

三十三人,後有光緒十年(1884)世芳自識,全篇不記引用書名.

其後二年即光緒十二年(1886)錢塘諸可寶作疇人傳三編七卷,補淸代疇人各傳,引用書目,則於下表見之.

第三表

姓名	引用書名
吳任臣	四庫全書總目，今世說，鶴徵前錄，疇人傳．梅文鼎傳，道古堂集，鮚埼亭集．
龔士燕	武進縣志，道古堂文集．
楊文言 附	上書．
* 馬負圖 附	上書．
* 方正珠	安徽通志．
* 胡宗緒 附	上書．
王蘭生	道古堂文集，鮚埼亭集．
顧棟高	國史儒林傳，詞科掌錄，春秋大事表序．
子 顧炳	上書．
吳鼐 附	上書．
華玉淳	蒲褐山房詩話，湖海文傳，春秋朔閏表．
華綱 附	上書．
胡天游	詞科掌錄，小倉山房文集，春秋夏正．
嚴燧	道古堂文集．
* 何夢瑤	廣東通志，粵臺徵雅錄，南海縣志．
* 馮經 附	上書．
萬光泰	詞科掌錄，鮚埼亭集，鶴徵後錄．
* 沈大成	湖海文傳，東原集，學福齋雜著．
董達存	武進縣志，續疇人傳，許如蘭傳．
* 淩霄	江寧府志．

*	孔繼涵	復初齋文集，算經十書序.
	汪廷榜	安徽通志.
*	張裕業 附	上書.
*	余 煌 附	上書.
*	程尙忠 附	上書.
*	許宗彥	孳經室二集，鑑止水齋集，衎石齋記事稿，湖州府志.
*	徐養原 附	上書.
*	紀大奎	愼齋全集，校刻算經十書，江西通志.
*	傅九淵 附	上書.
*	史大壯 附	上書.
*	胡文輪 附	上書.
*	歐陽敬 附	上書.
*	黃 俊 附	上書.
*	朱 鴻	緝古算經音義序，算法大成上編，董方立遺書序，衎石齋記事稿，刻楮集詩注，務民義齋算學，海昌備志.
*	張豸冠 附	上書.
	時 銘	養一齋文集.
	黃承吉	安徽通志.
	周 濟	古微堂外集.
*	臧壽恭	湖州府志.
	齊彥槐	安徽通志，續疇人傳—張作楠傳. 翠微山房算學叢書，算學大成上編，江寧府志.
*	江臨泰 附	上書.
	王大善	程侍郎遺集.
	程恩澤	孳經堂續集，癸巳類稿，存稿，程侍郎遺集.
	俞正燮 附	上書.
	鄭復光 附	上書.
	劉逢祿	養一齋文集，武進縣志.
*	湯洽名 附	上書.
*	牟 庭	投壺算草，周公年表.
	劉日義	上書.
*	顧廣圻	養一齋文集，思適齋集.
	黃汝成	養一齋文集，嘉定縣志.
*	安淸翹	書目答問.

阮元	雷塘庵主弟子記，揅經室全集.
* 駱騰鳳	開方釋例，藝游錄，紓藝室雜著甲編.
吳玉楫 附	上書.
李兆洛	藝舟雙楫，養一齋文集，恆星赤道經緯圖，皇輿全圖.
* 張鑑	墨林今話，湖州府志，藝舟雙楫，紓藝室詩存注.
* 沈欽裴	養一齋文集，九章算術細草，數書九章札記，紓藝室雜著甲，詳解九章算法札記，楊輝算法札記.
* 宋景昌 附	上書.
* 毛嶽生 附	上書.
錢儀吉	衎石齋記事稿，續稿，緝古算經音義序. 曾文正公文集.
陳杰	緝古算經細草圖解音義，算法大成上編，紓藝室詩存注，戴府君行狀，湖州府志.
* 丁兆慶 附	上書.
* 張福僖 附	上書.
* 項名達	下學庵句股六術，算術大成上編，嘉慶丙子科鄉試齒錄. 戴府君行狀.
* 王大有 附	上書.
金望欣	安徽通志，算法大成.
* 岑建功 附	上書.
岑淦 附	上書.
* 李時溥	安徽通志.
* 董桂科 附	上書.
周成 附	上書.
* 羅士琳	比例匯通，觀我生室彙稿，養一齋集，紓藝室詩存注.
* 易之瀚 附	上書.
* 沈齡	上書.
* 田普實	上書.
朱駿聲	說文通訓定聲附錄行狀，蘇州府志.
* 徐有壬	務民義齋算學，鄒徵君遺書，白芙堂算學叢書序跋.
馬釗	顯志堂稿.
* 熊其光	紓藝室雜著賸稿.
鄒漢勛	國朝先正事略，數學拾遺，輿地經緯度里表.
弟 鄒漢池	上書.

姓名		著作
施勤		步算筌蹏.
* 戴煦		戴府君行狀，兩浙忠義錄，求表捷術，鄒徵君遺書.
楊寶臣	附	上書.
諸可繼	附	上書.
諸可炘	附	上書.
* 顧觀光		九數外錄，舒藝室雜著.
韓應陛		上書.
* 夏鸞翔		洞方術圖解，致曲術圖解，少廣縋鑿.
* 馮桂芬		顯志堂稿，弧矢算術細草圖解，續纂江寧府志.
* 陳暘	附	上書.
管嗣復	附	上書.
尹錫瓚		顯志堂稿，蘇州府志.
錢綺		上書.
* 鄒伯奇		南海縣志，鄒徵君遺書，舒藝室雜著甲編，又詩存注，昨非集，傳習錄.
* 劉熙載	附	上書.
* 伊德齡	附	上書.
* 時曰淳		養一齋文集，百雞術衍，嘉定縣志.
陳璪	附	上書.
* 丁取忠		白芙堂叢書.
* 李錫蕃		上書.
* 吳嘉善		白芙堂叢書，舒藝室詩存注.
* 汪曰楨		歷代長術輯要，古今推步諸術考，推策小識，超辰表，如積引蒙，舒藝室詩.
* 左潛		白芙堂算學叢書.
* 曾紀鴻		白芙堂算學叢書.
* 張文虎		舒藝室全集.
* 李善蘭		舒藝室詩存注，同文館本測圓海鏡，則古昔齋算學，幾何原本全書，重學附曲線說，代微積拾級，談天.

附錄:

姓名	著作
葛宜	國朝閨閣詩鈔甲之十……小傳.
沈綺	國朝閨閣詩鈔甲之八……小傳.
王貞儀	金陵詩徵，衍石齋記事稿.

光緒戊戌(1898)澄州黃鍾駿撰疇人傳四編十一卷幷附卷,由華蘅芳鑒定.此編起自上古,幷補清代疇人各傳.其明以前諸疇人,則於阮羅所引各書外兼探次之各書:

內經素問. 抱樸子. 管子. 大戴禮記. 論語.
范子. 文子. 關尹子. 墨子. 莊子. 孟子.
尸子. 離騷. 呂氏春秋. 淮南子. 桓子新論.
太平御覽. 册府元龜. 華陽國志. 廣韻.
長曆. 物理論. 渾天記. 舜典正義. 崇文書目.
中興書目. 通志. 國史補. 北夢瑣言.
十國春秋. 困學紀聞注. 王氏談錄.
皇極經世書. 正蒙參兩篇. 文獻通考.
明焦竑經籍志. 尙友錄. 長術輯要. 內經注.
畿輔志. 陳氏讀書目. 通雅.
丁巨算法. 幾何要法.

雖所收不免較濫,而用力之勤,已足多矣.其清代疇人各傳引用書目則於下表見之.

第四表

姓名	引用書名
邱維屏	國朝先正事略.
吳守一	四庫全書提要.
何文熙	桂陽州志.
孫　蘭	焦里堂北湖小志.
謝文英 附	上書.
戴　梓	嘯亭雜錄.
王德昌	濟南府志.
孔貞瑄	曲阜縣志.
顏光敏	上書.
柴紹炳	文獻徵存，國朝先正事略.
劉獻廷	國朝先正事略.
倪觀湖	方田通法序，梅氏歷算全書凡例.
楊定三 附	上書.
鮑祖述 附	上書.
王　雯	吳門耆舊記.
* 顧陳垿	國朝詩人小傳.
段巘生	國朝詩人小傳.
董以寧	國朝先正事略.
王芝闕	嵩縣志.
葉左寬	國朝先正事略.
李鍾佐	國朝先正事略.
汪一元	上書.
秦蕙田	國朝先正事略，觀象授時.
余廷燦	國朝先正事略.
* 嚴長明	上書.
丁　杰	上書.
孫星衍	上書.
李　賓	圜天圖說.
* 陳昌齊	廣東通志，測天約術.
江　聲	國朝先正事略.
姚光晉	庸閒齋筆記.

何紹業	國朝先正事略.
* 葉　棠	天元一圖說，繇算針度
* 鄒安鬯	近代疇人著述記.
* 陳　澧	三統術詳說，弧三角平視法.
殷家儁	格致補箋，自鳴鐘說補正.
黃炳垕	交食捷算，五緯捷算，測地志要，方平儀象.
胡秉成 附	上書.
* 董毓琦	星算補遺.
* 廖家綬	廖氏算書.

合阮元,羅士琳,華世芳,諸可寶,黃鍾駿各疇人傳記,引用書籍至四百餘種,爲文前後六十餘萬言,宜可無憾矣.而各傳,記將天文家算學家合稱疇人,著於一篇,於各家之生卒年月及著者年代,都未深考;往往序文凡例連篇記入,而製作此序文之年月,反漏而不記.卽各書之精華,學派之流傳,與乎社會之背影,亦全未顧及.學者雖熟讀此六十餘萬言之大著,而於中算源流仍無所多得.且晚近數十年算家續著之書,與乎新發見之史實亦將如諸,黃之例,勉強賡續乎?或將翻昔日之成案,而重編一算史乎?近十餘年來有志於後說者,有李儼,錢寶琮,裘沖曼諸人.

李儼於民國八,九年間,在北京大學月刊發表所撰中國數學源流考略(見民國八年四月,第一卷第四號,第一至一九頁:八年十一月,第一卷第五號,第五九至

七四頁,九年七月,第一卷,第六號,第六五至九四頁.)頗引起研究此學之興會.趙繚所編數學辭典(1923)其"數學小史內篇之部",即八九採自攷略.李儼以中算史卷帙太繁,乃於其中抽取短文,分投於各雜誌,計有三十餘篇.[1]其單行本計有:中國數學大綱(1931)中國算學小史(1930)二種.

錢寶琮曾於學藝雜誌,科學雜誌,南開週刊上,發表中算史論文,又編有中國算學史講義在南開教授,其單行本有:古算考源(1930)中國算學史(1932)二種.

李儼以為作史首重史料,乃廣搜中國算學書,其目錄及目錄續編先後載於科學雜誌五卷四,五期;十卷四期;十一卷,六期;十二卷十二期;十三卷八期;十五卷一期;十六卷五期,十一期;十七卷六期中,又請裘沖曼以所編中國算學書目彙編登於清華學報三卷一期,曾遠榮復為增補.

據最近所知,清代算家之有著述可考者,以筆畫多寡為序,可得下表諸人.

---

(1) 詳見'二十年來中算史論文目錄,'國立北平圖書館館刊,第六卷第二號,第57-65頁,民國二十一年(1932)三,四月.

第五表

畫數	姓					
二畫	丁	丁枚	丁兆慶	丁取忠	丁福保	
四畫	孔	孔興泰	孔廣牧	孔廣森	孔繼涵	孔慶霖
		孔慶鑑				
	尹	尹錫瓚				
	支	支寶枏				
	方	方愷	方士㮾	方正珠	方本恭	方中通
		方克猷	方貞元			
	毛	毛元存	毛宗旦	毛宗藩		
	王	王世	王猷	王韜	王鑒	王大有
		王元啓	王正楓	王季同	王季鍇	王宗文
		王樹枏	王貞儀	王達眷	王煥奎	王嘉玉
		王澤沛	王錫恩	王錫闡		
五畫	史	史大壯				
	左	左潛				
	石	石振埏				
六畫	伊	伊德齡				
	安	安清翹				
	年	年希堯				
	朱	朱煦	朱熙	朱培	朱仁積	朱世增
		朱駿聲	朱憲章	朱葆琛	朱培業	朱湘澄
	江	江永	江衡	江燾	江大鍵	江臨泰
	牟	牟庭				
七畫	何	何步瀛	何壽章	何夢瑤		
	余	余熙	余煌			
	吳	吳誠	吳烺	吳中順	吳和翾	吳延齡
		吳起潛	吳傳綺	吳應召	吳興讓	吳壽萱
		吳緒雲	吳嘉善	吳蘭修	吳礪琨	
	李	李元	李淲	李鏐	李銳	李潢
		李藩	李子金	李方湲	李玉如	李長茂
		李固松	李炳章	李時溥	李愼齋	李祥麟

畫	姓					
		李善蘭	李錫蕃	李鑾宣		
	杜	杜知耕	杜煒孫			
	沈	沈 宏	沈 蓮	沈大成	沈士桂	沈光烈
		沈保樞	沈欽裴	沈善蒸	沈祖綿	沈炳皆
		沈嘉澍				
	汪	汪 萊	汪曰楨	汪光恆	汪香祖	
	阮	阮 元				
八 畫	周	周 達	周 瀋	周道章	周登瀛	周毓英
		周廣詢				
	宗	宗森寶				
	屈	屈曾發				
	明	明安圖				
	林	林文釗	林紹清	林傳甲		
	易	易之瀚				
	知	知 彌				
	金	金殿祥	金鷹揚			
九 畫	侯	侯 度				
	姚	姚申錫				
	洪	洪錫禧				
	紀	紀大奎				
	范	范景福	范震亞			
	胡	胡 豫	胡文翰	胡支淵	胡先座	胡宗緒
		胡約堂	胡煥文			
十 畫	倪	倪思寬	倪紹高			
	唐	唐再豐	唐國熊			
	夏	夏允彝	夏鸞翔			
	孫	孫家鼐				
	席	席 淦				
	徐	徐 安	徐 異	徐 善	徐 鄂	徐 壽
		徐世倫	徐有壬	徐春和	徐建寅	徐樹勳
		徐虎臣	徐錫麟	徐鳳誥	徐紹楨	
	時	時 銘	時曰醇			
	殷	殷家儁				

畫數	姓					
	馬	馬守忠	馬守愚	馬負圖		
十一畫	崔	崔朝慶				
	張	張　璨	張　煜	張　潮	張　爔	張　鑑
		張宗孟	張作楠	張東烈	張貢九	張裕華
		張裕業	張景光	張敦仁	張豸冠	張鼎祐
		張福僖	張迪甕	張楚鍾	張德昭	張茂涗
	強	強汝詢				
	曹	曹汝川	曹汝英			
	梅	梅　沖	梅文鼎	梅文鼐	梅啓照	梅瑴成
	淩	淩　霄	淩步芳			
	章	章德棨				
	莊	莊亨陽				
	莫	莫占衞				
	許	許桂林				
	陳	陳　沚	陳　采	陳　杰	陳　訏	陳　棠
		陳　善	陳　澧	陳　瑑	陳　暘	陳方墀
		陳有霖	陳平瑛	陳世仁	陳世明	陳世信
		陳希齡	陳忠恕	陳其晉	陳啓沅	陳壽田
		陳維祺	陳致堅	陳厚耀	陳藎謨	陳修齡
		陳懋齡	陳鶴齡			
	陶	陶耕莘	陶駿良			
	陸	陸　采				
十二畫	傅	傅九淵	傅雲龍			
	勞	勞乃宣	勞綱章			
	彭	彭致君	彭瑞熙	彭祖賢	彭聘求	
	屠	屠文漪				
	揭	揭廷鏘				
	曾	曾紀鴻				
	湯	湯金鑄	湯洽名			
	焦	焦　循	焦廷琥	焦騰鳳		
	盛	盛鍾聖				
	程	程　祿	程之驥	程尚志	程瑞田	
	童	童世亨				

	華	華世芳	華蘅芳			
	鄂	鄂 諾				
	項	項元晳	項名達			
	馮	馮 經	馮 徵	馮世徵	馮桂芬	
	黃	黃方慶	黃百家	黃啓明	黃宗憲	黃伯瑛
		黃慶澄	黃傳祁	黃炳垕	黃泰生	黃遠墉
		黃緣爲	黃鍾駿	黃關叔		
十三畫	楊	楊之培	楊定三	楊兆鋆	楊作枚	楊榮袞
		楊承烈	楊履恭			
	萬	萬 熹				
	葉	葉 棠	葉振鐸	葉鳳藻	葉耀元	
	葛	葛朝模				
	董	董恩新	董桂科	董毅江	董祐誠	董夢庚
		董毓奇				
	解	解崇輝				
	賈	賈步緯				
	鄒	鄒立文	鄒伯奇	鄒祖蔭		
十四畫	熊	熊其光				
	維	維福生				
	翟	翟 覲	翟寶書			
	臧	臧壽恭				
	趙	趙元益				
十五畫	劉	劉 掞	劉 提	劉 衡	劉 鶚	劉 鐸
		劉大觀	劉光照	劉永錫	劉昌言	劉維師
		劉澤楨	劉彝程	劉嶽雲	劉熙載	劉鶚華
		劉執經	劉湘煃	劉逞輪		
	歐	歐陽儁				
	潘	潘逢禧	潘應祺	潘紹經		
	蔣	蔣士棟	蔣士棨	蔣維鍾		
	褚	褚寅亮				
	談	談 泰				
	鄧	鄧之秀				
	鄭	鄭毓秀				

十六畫	盧	盧　朋	盧　靖			
	諸	諸可寶	諸可櫟			
	錢	錢　綺	錢大昕	錢志儀	錢佩青	
	駱	駱騰鳳				
十七畫	應	應文清				
	繆	繆朝銓				
	蕭	蕭開泰	蕭邦彥	蕭履安		
	薛	薛乃疇	薛光錡	薛鳳祚		
	謝	謝　唐	謝洪賚	謝家禾	謝程九	謝錫九
	韓	韓保徵				
十八畫	戴	戴　侃	戴　源	戴　震	戴　煦	
	瞿	瞿方梅				
	聶	聶祖訂				
十九畫	羅	羅士琳	羅長畸	羅致勳		
	譚	譚　文	譚學元			
二十畫	嚴	嚴杏林				
二十一畫	顧	顧　澄	顧長發	顧觀光	顧鼎銘	顧儒基
二十二畫	龔	龔　傑	龔　淪	龔銘鳳		

此表雖尙不免缺漏,已較第一,二,三,四表所有增益,且更實在矣.私家搜集,應多不周,乃印"徵求中國算學書啓事"分發各界,并登廣告於雜誌,報章上.此舉雖收效至微尙冀有萬一之獲也.

十六年十一月第三次汎太平洋學術會議在日本東京開會時,日人三上義夫著有"Mathematics in China and Japan"一文末節述中,日研究算史之經過其文

如下.

22. "of historical studies on the old Japanese mathematics, mention must be made first of T. Endo's History of Japanese Mathematics (in Japanese) (1896) and the revised and enlarged edition of 1918. After Endo's work appeared the studies of D. Kikuchi, T. Hayashi, Y. Mikami, K. Yanagihara and others, in whose hands details as well as general and historical views were given. Besides these, there are C. Kawakita, N. Okamoto, K. Kano, J. Kawai and others who are deeply versed in the subject but whose works have, for the most part, not been published.

The Chinese have published a number of studies based on European and American histories of mathematics. The Chinese Li Yen 李儼 has published a number of historical articles and his works are well known. Besides Mr. Li, there are also others who occasionally bring out their writings on the subject, and the historical studies of the Chinese are gradually advancing."

中國研究中算史者爲數尚少,深願研究者漸衆,俾

中算早得完滿整理,其算學家後裔與藏書家留有中算舊籍之鈔稿本者,亦望交與研究此學者,愼加批評,舊算精華,不至墮失,則幸甚矣.

二十年來中算史料之發見

目　次

1. 小引

民國二十一年八月,中國科學社開年會於西安,儼曾應王理事長季梁之命,演說中國數學史大意.該項演述,未留底稿,惟念二十年來中算史料之發現,事較重要.前雖發表「二十年來中算史論文目錄」一文,

於國立北平圖書館館刊第六卷第二號.記錄年來國內人士關於中算之單篇論文.而於近年中算史料發現之經過,尙未記及.茲更就所知,臚舉下條.顧以見聞所限,或恐未備,尙望社內外同志,隨時指示,俾陸續有所發現,則幸甚矣.

2. 敦煌石室算書

敦煌石室藏書,於一千九百零七年五月二十日,經斯坦因 (A. Steine) 發現,搜括二十四箱寫本而去.繼之者爲法人伯希和 (Paul Pelliot). 經此兩次搜括,已所餘無幾,中國官廳最後乃將所餘者掃數運回北京.計今日所知敦煌石室漢文書.在倫敦有六千卷,在巴黎有一千五百卷,在北平有二千五百卷.其散在私家,究有若干,尙不得知.現在亦未有敦煌寫本全部目錄行世.僅在巴黎者已編有目錄,在倫敦,北平者至今尙未刋出,其中究有若干史料.尙未得知.惟在法國巴黎圖書館所編敦煌將來目錄第二六六七號內有「敦煌石室算書」一種,首尾殘缺.李儼於民國十五年六月爲發表於中大季刋,後復收入中算史論叢(一)之內.查該算書一開,記有

「儀同, 督主, 都督, 將, 隊, 火, 駁, 人.」

各名稱,吾人可由此種邊疆軍制進而考求該書時代.原書算法雖甚粗淺,但爲吾國最古之寫本算書,則無疑義.現在敦煌寫本,散在全世界,將來全部整理之後,或有他種算書之發現,亦未可知.

3. 永樂大典算書

永樂大典以明永樂二年(1404)成書.隆,萬,(1567-1619)以後,便有殘缺.今國立北平圖書館藏有寫本大典目錄一册,上有翰林院印.館長袁同禮疑卽乾隆四庫開館時(1772)館官核查之底册.(見國立北平圖書館館刊第六卷第一號—「永樂大典存目」).今查此目錄,永樂大典關於算學之

「算卷一萬六千三百二十九至一萬六千三百四十八　　十本

算至斷卷一萬六千三百四十九至一萬六千三百六十七　　十本」

尙完全存在.故戴震(1724-1777)尙得於此中輯出算經十書二十五卷,及益古演段三卷,數學九章十八卷.惜其中尙有他種算書,尙未輯出.庚子(1900)之役,全部散出,流入全世界各地.今英國劍橋大學藏有「永樂大典算卷一六三四三之一六三四四共二卷」,國立

北平圖書館亦有影攝本.吾人尙可於此中見透簾細草,丁巨算法,楊輝詳解算法,楊輝纂類,錦囊啓源,詳明算法,嚴恭通原算法,有爲知不足齋叢書,宜稼堂叢書,鈔本諸家算法及序記所未記者.而鈔本諸家算法及序記爲莫友芝(1811-1871)子繩孫所藏,疑亦出於永樂大典.李儼於民國初元,在上海收得此書.吾人於劍橋大學藏本永樂大典,及諸家算法及序記得考定宋楊輝算書時代,并考知 Pascal 三角形,中國之發見,先於 Petrus Apianus 二百六十六年.

4. 算經十書

算經十書爲吾國算學古籍,據明程大位算法統宗(1593)卷末,稱:

「宋元豐七年(1084)刋入祕書省,又刻於汀州學校:

黃帝九章, 周髀算經, 五經算經, 海島算經,

孫子算經, 張丘建算經, 五曹算經, 緝古算經,

夏侯陽算經, 算術拾遺.」

宋元豐七年刋刻算書之事,史書不載.據宋王應麟玉海卷四四稱:元豐間趙彥若校孫子,五曹,緝古,海島.宋馬端臨通考,卷二一九稱:元豐京監本夏侯陽算經一卷,則有明證.淸乾隆四庫開館時(1772)僅於永樂

大典輯出算經十書,今萬有文庫尚有此書翻刻本行世.但汲古閣藏有鈔本宋刻十書.爲毛晉 (1599-1659) 季子扆(1640-?)所收藏.蓋從太倉王世貞家得孫子,五曹,張丘建,夏侯陽四種,從章邱李開先家得周髀,緝古二種;從黃虞稷(1629-1691)處得九章;皆元豐七年祕書省刋本.此項十書輾轉流入清宮,天祿琳瑯書目之御題算經十册卽爲其書.該鈔本與永樂大典本頗有出入,二百餘年來,收入禁中,外間無從得見.近年故宮博物院圖書館開館,世始有知之者.本年故宮博物院輯刻天祿琳瑯叢書第一集內有:

「汲古閣景宋鈔本: 周髀算經, 九章算經, 孫子算經, 五曹算經, 張丘建算經, 夏侯陽算經, 緝古算經.」

自此中外學人可多一參攷資料矣.宋刻宋印本算經十書近發見五種,此項祕笈尚藏人間,亦留心中算史事者所樂聞也.(1)

(1) 見趙萬里芸盦羣書題記: 孫子算經三卷,張邱建算經三卷,殘本九章算術五卷,五曹算經五卷,數術記遺一卷,以上宋刻印本,在民國二十二年(1933)十二月七日大公報圖書副刊第六期之內。

5. 楊輝算書

宋楊輝算書,清代僅散見於知不足齋叢書,及宜稼堂叢書,惜已殘缺不全,中有卷頁錯亂者.時以阮元(1764-1849)李銳(1768-1817)羅士琳(?-1853)輩之留心中算,於楊輝算書,尙無所多知.近年以日本宮內省,內閣文庫,大塚高等師範學校三處所藏七卷本楊輝算法,及楊守敬舊藏七卷本楊輝算法之重出,及永樂大典殘本,諸家算法及序記之發現,楊輝算書之事實,始見明顯.李儼曾有「宋楊輝算書考」一文載於圖書館學季刊四卷一期,記錄其事.楊輝算法一書中縱橫圖(magic square)之記載,在中算史上,富有價值.因通常始載縱橫圖者,多推程大位(1593),自七卷本楊輝算法發見後,知其所記歲在宋德祐乙亥(1275),實先於程氏三百二十年.其在西洋則十四世紀始有人研治其法.

6. 明代算書

清阮元以明代爲中算黑暗時代,因不務搜求.疇人傳(1795-1799)所載明代算家爲數寥寥.實則明代介於宋元及清,其所貢獻,亦多可記.李儼因於民國十五年十二月,就搜求所得,作「明代算學書志」一文,刻入

圖書館學季刊一卷四期.二十年三月更因續有搜獲,作「增删明代算學書志」一文,刻入圖書館學季刊五卷一期.計所收近七十種.近日續有發現,再整理所得收入中算史論叢中.

7. 籌算制度

吾國古代計算器具,稱策,算,籌,籌算,籌策,算籌,或算子.其始形式甚長,如今籤籌,且有長及尺許者.

說文,前漢書律歷志并作長六寸,隋書律歷志僅作三寸,清勞乃宣於古籌算考釋僅略記一二事.近年考據所得,知其始用竹,繼有用鐵,用牙,用玉者.其儲算之器,有算袋,算牓,算子筒,說詳李儼「籌算制度考」,見燕京學報第六期.

8. 珠算制度

珠算之發明人,今雖未考得.但向來以為程大位(1593)所獨刱.近年得見吳敬九章詳註比類算法大全(1450),柯尚遷數學通軌(1578),及朱載堉算學新說.知各書并在程大位之前,述及算盤.而珠算中撞歸起一歌訣,則丁巨算法(1355),安止齋何平子詳明算法,并已題及.說詳李儼「珠算制度考」,見燕京學報第十期.

9. 數學教育制度

中國數學教育制度,以唐,宋,元,明爲最著.唐承隋制.其算學興廢之制,見於唐六典,舊唐書,新唐書,唐會要,大唐新語(日知錄卷十一,明經條引),唐文粹,資治通鑑,唐摭言,通典,通志,通考.宋代數學教育制度,見於宋史,洪邁容齋三筆,通考,李攸宋朝事實,鈔本宋會要各書,元明制度,散見於續通志,元通制條格,明太祖實錄(日知錄卷十一,經義論策條引),嚴恭通原算法序(1372)日知錄,皇明太學志諸書,說詳李儼「唐宋元明數學教育制度」,見科學第十七卷第十期.

10. 縱橫圖說

國內縱橫圖說,始見於宋楊輝續古摘奇算法(1275),再見於明程大位算法統宗(1593).明清之際似曾一度由西洋輸入此項學說.最近北平故宮博物院圖書館,發現鈔本三三等數圖一册,未著撰人姓氏,其書原藏敦本殿,後移入故宮博物院圖書館.著書時代,亦已無考.疑爲明清之際西洋輸入之作.其第二度復於清季由西洋輸入傅蘭雅(Dr. John Fryer)主編格致彙編(西名 The Chinese Scientific and Industrial, Magazine)其第三年(1878?)第二册載十六字方圖.李提摩太(Dr.

Timothy Richard)廣學類編(西名 Handy Encyclopaedia, 1903)有方面奇圖,頗引起研究此圖說之興味.說詳李儼「中算家之縱橫圖 (Magic Squares) 研究」,見學藝雜誌第八卷第九號.

11. 幾何原本

利瑪竇(1552-1610)於萬歷間(1603-1607)與徐光啓(1562-1633) 共譯幾何原本前六卷,利瑪竇萬歷丁未(1607)序稱:

「至今世又復崛起一名士,爲竇所從學幾何之本師,曰丁先生,開廓此道,益多著述.竇昔游西海,所過名邦,每遘顓門名家,輒言:後世不可知,若今世則丁先生之於幾何無兩也.先生於此書覃精已久,旣爲之集解,又復推求續補凡二卷,與原書都爲十五卷.」

陳寅恪以爲利瑪竇所譯丁先生十五卷本幾何原本卽 Clavius(1537-1612),Euclidis Elementorum Libri XV, 1517, 以 Clavius 拉丁文爲 Clavus, 意爲丁(nail) 也.同文算指

言 $\frac{13946007693}{30800000}=46\frac{109207693}{30800000}$, $\sqrt{20}=4\frac{5473}{11592}$,

亦引據 Clavius, Epitome Arithmetiae Practicae, Rome, 1583 之說也.

利徐共譯本幾何原本曾幾經校刻,徐光啓「題幾何原本再校本」稱:

「是書刻於丁未(1607)歲,板留京師.戊申(1608)春利先生以校正本見寄,令南方有好事者重刻之,累年來竟無有.校本留置家塾,暨庚戌(1610)北上,先生沒矣.遺書中得一本,其別後所自業者,校訂皆手跡,追惟篝燈函丈時,不勝人琴之感.其友龐(迪我),熊(三拔)兩先生,遂以見遺.庋置久之,辛亥(1611)夏季,積雨無聊,都下方爭論歷法事.余念牙絃一輟,行復五年,恐遂遺忘,因偕二先生重閱一過,有所增定,比於前刻差無遺憾矣.續成大業,未知何日,未知何人,書以竢焉.吳淞徐光啓.」

徐光啓孫爾默(1610–1669)「跋幾何原本三校本」稱:

「昔萬曆丁未(1607)泰西利氏譯,而授之先文定公,先文定筆受而述之簡册,正其訛舛,删其複蔓,而付之剞劂氏.越五年辛亥(1611)再校而復刻之.今此本仍多點竄,又辛亥以後之手筆也.捧讀之餘,儼然對越,因念吾輩讀書,如拂塵几,愈拂愈淨,不厭其煩也.譯本曾轉寄西土,彼中學人,謂經先公訂正之後,

較之原文,翻覺屈志發疑,心計成數,以此知公之於數學,出自性成,特藉西文以發皇耳.」(見徐氏宗譜)

(2)

利徐共譯本曾譯成滿文,法蘭西人支那學書目,(H. Cordier, Bibliotheca Sinica Vol. II, p. 1092),稱天學初函於乾隆二十三年(1758)譯爲滿文,其幾何原本自亦在翻譯之列也.

淸初七卷本幾何原本,及十二卷本幾何原本二種,又有幾何原本滿文譯本一種.(3)

今北平故宮博物院圖書館藏:

「滿文. 律一二一九,45

幾何原本七卷三册.鈔本. 子 景陽宮

漢文 律八三五,29

幾何原本七卷一册.鈔本.(有序) 景陽宮

附算法(原本)一卷.鈔本.(有序).」

又國立北平圖書館亦藏有:

(2) 參看:徐宗澤,文教閣老與科學,聖教雜誌第二十三年,第十一期,第61頁,民國二十二年(1933)十一月,上海。

(3) 參看:陳寅恪,幾何原本滿文譯本跋,中央研究院歷史語言研究所集刊第二本第三分,第281-282頁。民國二十年(1931)四月,北平。

「幾何原本七卷二册,內缺六卷一册.」

李儼已於「中國數學史導言」一文論述其事.北平故宮博物院圖書館又藏有:

「洪五九二,16.

幾何原本十二卷四册鈔本　(無序).　懋勤殿

附算法(原本)二卷鈔本　(無序).」

似爲數理精蘊本幾何原本之底本.

12. 對數表

「對數之發明及其東來」李儼已於十六年二,三,六月刊入科學中.其關於三角函數之對數表則李儼於「三角術及三角函數表之東來,」亦有記及.近年則此項對數表尚時有發現.如北平故宮博物院圖書館藏:

「律八四一,28.

御製對數闡微十卷五册　鈔本　景陽宮」

與數理精蘊略同,惟卷前多「一至一萬內數根」九葉,前無序,後無 90001 至 99991 表.

此外袖珍本對數廣運年希堯撰一册鈔本一百零四頁,及袖珍本數表一册.西幷爲小數四位之常用數對數表及三角函數對數表.

13. 數理精蘊

清聖祖受業西洋教士,因而編纂數理精蘊(1723年刻). 其書曾經修正,向無知者.自七卷本幾何原本十二卷本幾何原本,十卷本御製對數闡微,一卷本算法原本,及二卷本算法原本等之發見,其事始顯.李儼曾於「中國數學史導言」內略舉一二例可參觀焉.

14. 清代算書

清代算書,卷帙雖富,向無人加以整理.劉鐸古今算學書錄所記,亦多未備.民國十五年六月裘沖曼「中國算學書目彙編」,刊入清華學報三卷一號,曾遠榮又爲增補.其書以各書字畫多寡爲序,頗便檢查.李儼於十七,八年,又按人名字畫多寡爲序.但年來搜求所得,與書目之散見於各家著述,及各省縣志書者,尙可得若干種.當爲另編「清代算學書志」

15. 清代算家生卒年表

清代算家生卒年之見於各家疑年錄,或未見於疑年錄者,今總錄如下,以備學者參考

薛鳳祚(? -1680)	凌廷堪(1755-1809)	李善蘭(1810-1882)
王錫闡(1628-1682)	徐養原(1758-1825)	汪曰楨(1812-1881)
梅文鼎(1633-1721)	安清翹(1759-1830)	劉熙載(1813-1881)
陳厚耀(1648-1722)	焦　循(1763-1820)	熊其光(1817-1855)
陳　訏(1650-1732)	顧廣圻(1766-1835)	徐　壽(1818-1884)
陳世仁(1676-1722)	汪　萊(1768-1813)	鄒伯奇(1819-1869)
江　永(1681-1762)	李　銳(1768-1817)	李錫蕃(1823-1870)
梅瑴成(1681-1763)	許宗彥(1768-1819)	夏鸞翔(1823-1864)
莊亨陽(1686-1746)	戴敦之(1768-1834)	強汝詢(1824-1894)
陳世佶(1686-1749)	駱騰鳳(1770-1841)	華蘅芳(1830-1902)
沈大成(1710-1781)	劉　衡(1776-1841)	趙元益(1840-1902)
王元啓(1714-1786)	許桂林(1778-1821)	勞乃宣(1842-1920)
褚寅亮(1715-1790)	羅士琳(? -1853)	席　淦(1845-1917)
戴　震(1724-1777)	朱駿聲(1778-1858)	曾紀鴻(1848-1877)
李　潢(? -1811)	項名達(1789-1850)	左　潛(? -1874)
錢大昕(1728-1804)	董祐誠(1791-1823)	劉嶽雲(1849-1917)
錢　塘(1735-1790)	顧觀光(1799-1862)	黃泰生(1852-1893)
彊　淪(1739-1799)	徐有壬(1800-1860)	華世芳(1854-1904)
陳昌齊(1743-1820)	戴　煦(1805-1860)	何步瀛(1856-1917)
紀大奎(1746-1825)	陳　暘(1806-1863)	廖家綬(1860-1890)
孔廣森(1752-1786)	張文虎(1808-1885)	蔣維鍾(1868-1899)
張敦仁(1754-1834)	馮桂芬(1810-1874)	(完)

二十年來中算史論文目錄

序

民國以來,曾以研治中算史事,發表論文於各雜誌,爲拋磚引玉之助.茲復參考人文雜誌,國學論文索引,國學論文索引續編,并因北平圖書館及友人孫文青君之助,寫成此目,爲有志研究中算史者之參考.民國二十一年二月.

題	作者	所載雜誌	出版期	號	頁	備考
海鏡新題	崔朝慶	數學雜誌(南通)	中華民國元年十二月	二册	50-51	
古人喜用平方數	崔朝慶	數學雜誌(南通)	元年十二月	二册	84-85	
若干與幾何之別	崔朝慶	數學雜誌(南通)	元年十二月	二册	85	
常用數學	崔朝慶	數學雜誌(南通)	元年十二月	二册	86	
九九	崔朝慶	數學雜誌(南通)	元年十二月	二册	86-87	
某君來書論著述中國算學史事		科學	五年二月	二卷二期	235-237	
中國數學史餘錄	李儼	科學	六年二月	二卷二號	238-241	
中國圓周率略史	茅以昇	科學	六年四月	三卷四號	411-423	
π之略史	楊荃駿	北高數理雜誌	七年	一號	84-89	
圓周率考	齊汝璜	北大數理雜誌	八年一月	一卷一號	67-77	
中國數學源流考略	李儼	北大月刊	八年四月 十一月 九年七月	一卷四號 一卷五號 一卷六號	1-19 59-74 65-94	

中國數學源流考略識語	張崧年	北大月刊	八年四月	一卷四號	21-22	
圓率進化史	孫　塘	學生雜誌	九年四月	七卷四號	120-132	
李儼所藏中國算學書目錄	李　儼	科學	九年四月 九年五月	五卷四號 五卷五號	418-426 525-531	
大衍術論	高　均	工科雜誌（震旦大學院）	九年	二號	7-64	
大衍術	傅種孫	北京高師數理雜誌	九年	三期		
中國數學書籍考	劉應先	武高數理	十年一月至四月	六期 七期 九期	51-53 53-56 57-61 (未完)	國立武昌高等師範學校「數理學會雜誌」自民國十年四月九期起改名「數理化雜誌」
九章問題分類考	錢寶琮	學藝	十年五月	三卷一號	1-10	互見單行本錢寶琮古算考源
方程算法源流考	錢寶琮	學藝	十年六月	三卷二號	1-12	互見單行本古算考源
百鷄術源流考	錢寶琮	學藝	十年七月	三卷三號	1-6	互見單行本古算考源
求一術源流考	錢寶琮	學藝	十年八月	三卷四號	1-16	互見單行本古算考源
記數法源流考	錢寶琮	學藝	十年十月	三卷五號	1-6	互見單行本古算考源
「以上」及「以下」之用語	黃際遇	武高數理	十一年一月	六期	49-50	
珠算歸除之歌訣	黃際遇	武高數理	十一年一月	六期	50-51	
朱世傑垛積術廣義	錢寶琮	學藝	十二年一月	四卷七號	1-9	互見單行本古算考源
中國算書中之圓率研究	錢寶琮	科學	十二年二月 十二年三月	八卷二號 三號	114-129 254-265	
π之小史	周　沛	北師大數理雜誌	十二年六月	四卷二號	35-45	

易卦與代數之定律	沈仲濤	學燈（時事新報）	十三年一月三日			互見學燈合訂本第六卷第一冊第三號二頁至三頁
明清之際西學輸入中國考略	張蔭麟	清華學報	十三年六月	一卷一號	38-69	
紀元後二世紀我國大科學家——張衡	張蔭麟	東方雜誌	十三年十二月	二一卷二三號	89-98	
四元開方釋要	鄭之蕃	清華學報	十三年十二月	一卷二號	233-278	
策算淺釋	陳展雲	晨報六週年紀念特刊	十三年十二月		217-222	
張衡別傳	張蔭麟	學衡	十四年四月	四十期	1-13	
李儼所藏中國算學書目錄續編	李　儼	科學	十四年七月 十五年六月 十六年十二月 十八年三月 十九年十一月	十卷四號 十一卷六號 十二卷十二號 十三卷八號 十五卷一號	548-551 817-820 1825-1826 1134-7113 158-160	
大衍求一術之過去與未來	李　儼	學藝	十四年九月	七卷二號	1-45	互見李儼中算史論叢(一)
中算輸入日本之經過	李　儼	東方雜誌	十四年九月	二二卷十八號	82-88	互見李儼中算史論叢(一)
梅文鼎年譜	李　儼	清華學報	十四年十二月	二卷二號	609-634	互見李儼中算史論叢(一)
印度算學與中國算學之關係	錢寶琮	南開週刊	十四年十二月	一卷十六號	4-8	
重差術源流及其新註	李　儼	學藝	十五年四月	七卷八號	1-15	互見李儼中算史論叢(一)
敦煌石室算書	李　儼	中大季刊	十五年六月	一卷二號	1-4	互見李儼中算史論叢(一)
中算家之Pythagoras定理研究	李　儼	學藝	十五年十月	八卷二號	1-27	互見李儼中算史論叢(一)

中國算學書目彙編	裘冲曼	清華學報	十五年六月	三卷一號	附錄43-92	
又增補	曾遠榮	同上	同上	同上	附錄92-96	
李鄒顧戴徐諸家對於對數之研究	周明羣	清華學報	十五年十二月	三卷二號	1047-1068	
明代算學書志	李　儼	圖書館學季刊	十五年十二月	一卷四期	667-682	互見李儼中算史論叢(一)
對數之發明及其東來	李　儼	科學	十六年二三六月	十二卷二，三，六號	109-158 285-325 689-700	互見李儼中算史論叢(一)
九章算術盈不足術傳入歐洲考	錢寶琮	科學	十六年六月	十二卷六號	701-714	
中國算學書目彙編質疑	湯天棟	學藝	十六年六月	八卷七號	1-3	
三角術及三角函數表之東來	李　儼	科學	十六年九月	十二卷十號	1345-1393	
中算家之縱橫圖研究	李　儼	學藝	十六年九月	八卷九號	1-40	
明清之季西算輸入中國年表	李　儼	圖書館學季刊	十六年十二月	二卷一期	1-34	互見李儼中算史論叢(一)
九章及兩漢之數學	張蔭麟	燕京學報	十六年十二月	二號	301-312	
明清算家之割圓術研究	李　儼	科學	十六年十一，十二月 十七年一二月	十二卷十一，十二號 十三卷一，二號	1487-1520 1721-1766 53-102 200-250	
永樂大典算書	李　儼	圖書館學季刊	十七年三月	二卷二期	189-195	
秦以前之數學	劉朝陽	中山大學語言歷史研究所週刊	十七年三月六日	二卷十九號	182-194	
整理中國算學材料之提議	劉朝陽	中山大學語言歷史研究所週刊	十七年五月十六日	三卷二九期	26-27	
中算史之工作	李　儼	科學	十七年六月	十三卷六號	785-809	
李善蘭年譜	李　儼	清華學報	十七年六月	五卷一號	1625-1651	

中國珠算之起源	呂　炯	東方雜誌	十七年七月	二九卷十四號	81-84	
數名古誼	丁　山	中央研究院歷史語言研究所集刊（廣州）	十七年十月	一本一分	89-94	
徐光啓著述考略	徐景賢	新月	十七年十月	八號	1-14	
新嘉量之校量及推算	劉　復	輔仁學誌	十七年十二月	一卷一號	1-30	
近代中算著述記	李　儼	圖書館學季刊	十七年十二月 十八年六月 九月 十二月	二卷四期 三卷二期 三卷三期 三卷四期	601-640 149-200 367-387 601-617	
關於算學之中國故事	劉朝陽	中山大學語言歷史研究所週刊	十八年一月三十日	六卷六六期	29-32	
九章算術補注	李　儼	北平北海圖書館月刊	十八年二月	二卷二號	127-133	
中算家之級數論	李　儼	科學	十八年四五月	十三卷九，十號	1139-1172 1349-1401	
天算大家海寧李善蘭的著述	顧頡剛 陳　槃	中山大學圖書館報	十八年六月	七卷四期	15-22	
盧木齋（靖）先生與木齋圖書館（插圖）		圖書館學季刊	十八年六月	三卷一，二號合刊	卷前	
中國天文學史之一重大問題——周髀算經之時代	劉朝陽	中山大學語言歷史研究所週刊	十八年八月	九四，九五，九六期合刊	1-11	
周髀算經考	錢寶琮	科學	十八年九月	十四卷一號	7-29	
中算家之Pascal 三角形研究	李　儼	學藝	十八年十月	九卷九號	1-15	
孫子算經考	錢寶琮	科學	十八年十月	十四卷二號	161-168	
夏侯陽算經考	錢寶琮	科學	十八年十一月	十四卷三號	311-320	
珠算開方法的原理	紹　先	學生雜誌	十八年十二月	十六卷十二號	47	

新舊幻方底介紹	衛寶怡	南開大學週刊	十八年十二月	七七號	51	
籌算制度考	李　儼	燕京學報	十八年十二月	六號	1129-1134	
宋楊輝算書考	李　儼	圖書館學季刊	十九年三月	四零一號	1-21	
孫子算經補注	李　儼	國立北平圖書館館刊	十九年七八月	四卷四號	13-29	
九九數的遊戲	徐子龢	中華教育界	十九年十月	十八卷十號	63	
中算家之方程論	李　儼	科學	十九年十一月	十五卷一號	7-44	
莽量函率考	顏希深	燕京學報	十九年十二月	八號	1493-1515	
明清兩代來華外人考略	張恩龍	圖書館學季刊	十九年十二月	四卷三四號合刊	447-472	
新收陳房伯(希齡)歷算書稿述記	王獻唐	山東省立圖書館季刊	二十年三月	一卷一期	57-69	
增修明代算學書志	李　儼	圖書館學季刊	二十年三月	五卷一號	2123-2138	
堆羅漢	劉薰宇	中學生	二十年三月	十三號	87	
九章算術源流考	孫文青	女師大學術季刊	二十年四月	二卷一號	1-60	
劉氏檢積籌說明書	劉增冕	工程季刊	二十年四月	六卷二號	197-201	
配合論中之一旁支	高　均	科學	二十年四月	十五卷四號	508-513	
數名原始	方國瑜	東方雜誌	二十年五月	二八卷十號	83-88	
測圓海鏡研究歷程考	李　儼	學藝	二十年六月十月	十一卷二，六，八號	1-26 1-15 1-36	
物不知總之普通算法	敖文宗 李　儼	科學	二十年九月	十五卷九號	1399-1413	
字號考	梁岵廬	東方雜誌	二十年九月	六卷一七號	97-100	
珠算制度考	李　儼	燕京學報	二十年十二月	十期	2123-2138	
附錄						
古算名原	黃　節	國粹學報	第四年（光緒戊申三十四年）	第三册政篇 四六期 四九期	1-6 1-9	

永樂大典算書

永樂大典始於明永樂元年(1403),由解縉奉敕纂修,二年(1404)書成,賜名文獻大成,以多未備,復命姚廣孝等重修,又命禮部簡中外官,及四方宿學老儒有文學者充纂修,與其事者,凡二千一百六十九人,五年(1407)十一月書成,進呈,改名曰永樂大典.(1)

其時并有專家分與纂事,故明程大位算法統宗(1593)卷首,稱:

「夫難題昉於永樂四年(1406),臨江劉仕隆公,偕內閣諸君預修(永樂)大典,退公之暇,編成雜法,附於九章通明之後.」

而永樂大典事韻第一六三六二卷至一六三六四卷為雜法,未知是否即前稱之雜法,查大典中言算者,在事韻,計:

---

(1) 袁同禮,永樂大典考,學衡第二十六期,1924年二月.李正奮,永樂大典考,圖書館學季刊第一卷,第二期1926年六月.

『事韻

一六三二九	算		
一六三三〇	算法一	目錄	起原
一六三三一	算法二	乘法	
一六三三二	算法三	因法	
一六三三三	算法四	除法	
一六三三四	算法五	歸法	
一六三三五	算法六	加法 減法	
一六三三六	算法七	九章總錄	
一六三三七	算法八	方田	
一六三三八	算法九	方田	
一六三三九	算法十	方田	
一六三四〇	算法十一	粟米	
一六三四一	算法十二	衰分	
一六三四二	算法十三	衰分	
一六三四三	算法十四	異乘同除	
一六三四四	算法十五	少廣	
一六三四五	算法十六	少廣	
一六三四六	算法十七	少廣	
一六三四七	算法十八	少廣	

一六三四八　算法十九　商功

一六三四九　算法二十　商功

一六三五〇　算法二十一　委粟

一六三五一　算法二十二　均輸

一六三五二　算法二十三　均輸

一六三五三　算法二十四　均輸

一六三五四　算法二十五　盈不足

一六三五五　算法二十六　句股

一六三五六　算法二十七　句股

一六三五七　算法二十八　句股

一六三五八　算法二十九　音義

一六三五九　算法三十　九章纂類

一六三六〇　算法三十一　端疋

一六三六一　算法三十二　斤稱

一六三六二　算法三十三　雜法

一六三六三　算法三十四　雜法

一六三六四　算法三十五　雜法　算竿』

隆,萬 (1567–1619) 以後,書便有缺,入清則續通考謂缺其什一,紀昀等亦屢言其缺而不完,四庫開館 (1772) 戴震(1724–1777)等尙於此中輯出:

周髀算經二卷,音義一卷	永樂大典本
九章算術九卷	永樂大典本
孫子算經二卷	永樂大典本
海島算經一卷	永樂大典本
五曹算經五卷	永樂大典本
夏侯陽算經三卷	永樂大典本
五經算術二卷	永樂大典本
數學九章十八卷	永樂大典本
益古演段三卷	永樂大典本(2)

天祿琳琅書目於御題算經十册,稱:

『考四庫全書所錄張丘建,緝古二種,乃(王杰家藏)鈔本,其九章,孫子,五曹,夏侯陽,乃從永樂大典數篇編成.』

四庫全書中,由永樂大典輯出算書,曾以小部分付刻,如:周髀算經,九章算術,孫子算經,海島算經,五曹算經,夏侯陽算經,五經算術,幷有武英殿聚珍版刋本,曲阜孔繼涵(1739-1783)因永樂大典本海島,五經;宋元豐本周髀,九章緝古,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,幷戴

(2) 四庫全書總目卷一百六,子部十六,天文算法類一;卷一百七,子部十七,天文算法類二.

震所著策算一卷(1744),句股割圜記三篇(1758)二種合刻之,號爲算經十書.其他算書尚未輯出,已輯出各書亦未全出版也.

阮元(1764-1849)於此中鈔得百餘番,一時知算,如李銳(1768-1817)李潢(?-1811)輩并錄副傳觀,阮元於補疇人傳「楊輝」傳,論稱:

「輝所著書,載於文淵閣書目,訪之三十年,通人學士,俱未之見,嘉慶庚午(1810)余以翰林學士,充文穎館提調官,於永樂大典中鈔得楊輝摘奇及(雜鈔算書)等約百餘番,嗣-漕淮安,吾友江上舍鄭堂(藩)排比整齊之,然掇拾殘賸之餘,究非全帙也.……」

李銳於宜稼堂本楊輝算法嘉慶甲戌(1814)跋,稱:

「歲庚午(1810)應順天試,留京師,在李雲門侍郎(潢)寓邸,見雜鈔算書約百餘番,乃阮芸臺中丞(元)提調文穎館時,從永樂大典中摭錄者,中有楊輝摘奇數條,……」

宋秦九韶數書九章(四庫)館本作數學九章.李銳曾校四庫本數學九章,道光二十二年(1842)郁松年

曾用四庫本數學九章,以校明趙琦美本數書九章,[3]

李銳又校益古演段三卷(1797)刻於知不足齋叢書,此叢書由歙人鮑廷博,於乾隆丙申(1776)以後,陸續刊刻,至二十七集,未竟而卒,子孫繼之,成三十集.其二十七集中有:

透簾細草一卷　　撰人佚

續古摘古算法一卷　　宋楊輝撰

丁巨算法一卷　　元丁巨撰

疑卽出於阮元所謂之楊輝摘奇及雜鈔算書百餘番也.

永樂大典咸豐庚申(1860)又有遺失,光緒乙亥(1875)檢之,已不及五千册,至丙子(1876)僅三千餘册,癸巳(1893)僅六百餘册[4],庚子(1900)之亂,全書散佚,夢天餘話稱:

「庚子拳匪之亂,紅巾滿京華,……… 譯學館總辦劉可毅太史,於亂兵馬槽下,拾得永樂大典數十册.」[5]

---

(3) 宜稼堂叢書本數書九章札記.

(4) 見辭源.

(5) 王小隱,夢天餘話,丁巳(1917)元宵後五日,某年時報.

其分散各地者,今已有袁同禮,劉國鈞前後爲之編成存目.[6]

李儼先後得莫友芝(1811-1871)子繩孫舊藏諸家算法及序記,及永樂大典卷一六三四三及卷一六三四四,曾於李儼所藏中國算學書目錄,及續編記錄其事:

「(一六〇)諸家算法及序記,無卷數,不著撰人,鈔本,一册,(此書係獨山莫友芝次子繩孫舊藏本諸家算法中,有:楊輝日用算法,楊輝詳解算法,楊輝摘奇算法,透簾細草,丁巨算法,錦囊啓源,賈通全能集,詳明算法,嚴恭通原算法.諸家算法序記中,有九章算經序,楊輝通變算法序,楊輝田畝比類算法序,楊輝摘奇算法序,秦九韶數學九章序,敬齋先生益古演段序,詳明算法序,丁巨算法序,嚴恭通原算法序.)(詳明算法二卷,元儒安止齋撰序.序稱:「夫學者初習因歸,則口授心會,至於

(6) 袁同禮永樂大典考,學衡雜誌第二十六期.

袁同禮永樂大典現存卷目,中華圖書館協會會報,第一卷第四期,第4-10頁.

袁同禮劉國鈞永樂大典現存卷數續目,中華圖書館協會會報第二卷第四期第9-10頁,一九二七年二月.

擡歸起一,時有差謬,」足見珠算之術,元代已大備矣.』(7)

『(二五二)永樂大典卷一六三四三之一六三四四,十翰,算法十四之十五,影攝本,一册.

原書藏英國劍橋大學,法伯希和君影攝見贈.

本書爲「異乘同除,」及「少廣」兩節,其所引算書,有:九章算經,孫子算經,五經算術,五曹算經,夏侯陽算經,秦九韶數學九章,楊輝摘奇算法,楊輝詳解算法,楊輝日用算法,楊輝纂類,透簾細草,錦囊啓源,丁巨算法,賈通全能集,詳明算法,嚴恭通原算法.就中所引透簾細草,丁巨算法,楊輝詳解算法,楊輝纂類,錦囊啓源,詳明算法,嚴恭通原算法;有爲知不足齋叢書,宜稼堂叢書,鈔本諸家算法所未記者.』(8)

而九章算術,數書九章,賈亨算法全能集,則諸家算法及序記,及永樂大典卷一六三四三之一六三四四并作九章算經,數學九章,賈通算法全能集,則諸家算法及序記亦當如知不足齋叢書本三書,并出於永

(7) 科學第五卷,第五期,第531頁.

(8) 科學第十一卷,第六期,第820頁.

樂大典也.雖綴拾殘叢,非復全豹,就中已多中算史料,足供採擇,李儼已先後於所撰:

中國數學源流考略.(9)

大衍求一術之過去與未來.(10)

明代算學書志.(11)

及單行本中國算學小史,中國數學大綱上册,引述其說,而較重要者則爲楊輝之箸書年代,與其所記遞加圖(即Pascal triangle).他日全書或可續出,則吾人所得必復更多;以戴震,阮元之善述中算,未嘗全爲輯錄,誠可惜矣.

(9) 北京大學月刊第一卷第四,五,六號,民國八年四月至民國九年七月.

(10) 學藝雜誌第七卷第二號,民國十四年九月.

(11) 圖書館學季刊第一卷第四期,民國十五年十二月.

宋楊輝算書考

1. 書錄

楊輝字謙光,錢塘人.景定辛酉(1261)作詳解九章算法,後附纂類,總十二卷.今所傳者,非其全帙[1].又嘗著詳解算法若干卷,以盡乘除,九歸,飛歸之蘊.景定壬戌(1262)作日用算法二卷,以明乘除,爲初學用,編詩括十有三首,立圖草六十六問,永嘉陳幾先爲之題跋[2].咸淳甲戌(1274)作乘除通變本末三卷,上中卷乘除通變算寶爲輝自撰,下卷法算取用本末則與史仲榮合撰.德祐乙亥(1275)作田畝比類乘除捷法二卷,是年冬因劉碧澗,丘虛谷及舊刊遺忘之文,而作續古

(1) 宜稼堂叢書本詳解九章算法存商功第五,均輸第六,盈不足第七,方程第八,句股第九,凡五章.脫去方田第一,粟米第二,衰分第三,少廣第四,凡四章,所存者不循舊次,朱景昌亦未爲之排比.從永樂大典殘本卷一六三四三之一六三四四,十翰,算法十四之十五尙可輯得衰分第三,少廣第四,兩章.

(2) 其序跋及最題,載入李儼所藏鈔本諸家算法中.原書爲莫友芝(1811-1871)之子繩孫舊藏本.又前記永樂大典殘本亦有楊輝日用算法題問.

摘奇算法二卷.以上七卷稱爲楊輝算法.洪武戊午(1378)古杭勤德書堂新刋行世[3].

就中楊輝算法宋刻本,入清尚存殘卷.

按清羅士琳疇人傳卷四十七宋楊輝論稱:後聞蘇州黃蕘圃主事丕烈得宋刋楊輝算法,屬何君夢華元錫假錄其副,知輝於此學未云深造.

至明初洪武戊午(1378)有古杭勤德書堂刋本.

今國立北平圖書館藏宋楊輝算法第一册首頁大書『新刋宋楊輝算法,』其上橫書『古杭勤德堂書,』而目錄後記有『洪武戊午冬至,勤德書堂新刋』字樣.乃高麗覆明刻本.

明人著書如顧應祥句股算術(1533),程大位算法統宗(1593)並引楊輝算法之說.

明顧應祥句股算術卷上:句股求弦一『圓材從二尺一寸得方面幾何』題註稱『此術楊輝摘奇算法作一尺四寸二百八十一分寸之二百四十五謬矣』云云.又明程大位算法統宗卷三:田畝演段根圖解『假如方田隅斜一十四步問積步

(3) 國立北平圖書館藏有高麗覆明洪武刋本宋楊輝算法,原書爲楊守敬舊藏本.

併方面各若干』題,引楊輝方求斜法,斜求積法,謂『楊輝用開平求斜,理明以合面積』[4].又算法統宗卷八:海島題解,稱『宋楊輝釋名圖解,以伸前賢之美』[5].

明文淵閣書目,(1441) 明葉盛(正統進士) 菉竹堂書目及算法統宗(1593)並列楊輝著書目錄.

文淵閣書目:有楊輝九章一部一册,通變算寶一部一册,摘奇算法一部一册[6]

菉竹堂書目:有楊輝九章一册,通變算寶一册,摘奇算法一册[7].

算法統宗卷十三,算經源流,稱『嘉定,咸淳,德祐等年又刊各書:

詳解黃帝九章

詳解日用算法

乘除通變本末

(4) 見日本早稻田大學藏明刻本算法統宗卷三,第十七及第十八頁.

(5) 見日本早稻田大學藏明刻本算法統宗卷八,第十七及第十八頁.

(6) 據南京國學圖書館藏鈔本明楊士奇正統六年(1441)文淵閣書目卷十四第二十三頁.

(7) 據粵雅堂叢書本崑山葉文莊公菉竹堂書目.

續古摘奇算法

以上俱出楊輝摘奇內』[8].

永樂大典頗引其書,阮元(1764-1849)曾於文穎館鈔得百餘番.即據現存之永樂大典殘本卷一六三四三之一六三四四,尚引有楊輝摘奇算法,楊輝詳解算法,楊輝日用算法,楊輝詳解九章算法,楊輝纂類.又清人莫友芝子繩孫藏諸家算法亦出於永樂大典,此中亦引有楊輝摘奇算法,楊輝詳解算法,楊輝日用算法及楊輝詳解九章序,楊輝日用算法序,楊輝通變算法序,楊輝田畝比類算法序,楊輝摘奇算法序.

入清則有毛晉(1598-1652)精鈔本,宋楊輝算法殘本.

清陸心源皕宋樓藏書志卷四十八,稱:

『田畝比類乘除捷法二卷,算法通變本末一卷,乘除通變算寶一卷,算法取用本末一卷,續古摘奇算法一卷汲古閣影元本……………………

案是書每葉二十二行,行二十五字.卷中有毛晉私印,子晉,汲古主人,朱文三方印;仲雍故國

(8) 據古今圖書集成歷象彙編,歷法典第一百二十九卷,算法部彙考十七,算法統宗十三,第三十六頁.

人家,子孫寶之,朱文二方印;趙文敏書卷末云:吾家業儒,辛勤置書,以遺子孫,其志何如?後人不讀,將至鬻頮其家聲,不如禽犢,若歸他室,當念斯取非其有,无霝舍旃,五十六字,朱文大方印;毛扆之印,斧季,朱文二方印;毛晉二字連珠方印.汲古祕本書目所謂精鈔之書,每本有費四兩之外者,此類是也.』

案毛鈔本續古摘奇算法作一卷,蓋殘本也.

陸心源藏書輾轉流入日本,毛鈔楊輝算法亦與其列,日本明治四十三年河田羆靜嘉堂祕籍志第一帙卷七第三十七頁所載:

毛鈔楊輝算法宋楊輝 一匣影宋鈔二本,卽是書也.

又毛嶽生(1791-1841)[9]家藏本楊輝詳解九章算法殘本,原寫本每葉二十行,行二十一字.每葉俱有石研齋鈔本五字,卷末有石研齋秦氏印,未知秦氏爲何許人也[10].

---

(9) 據光緒八年(1882)嘉定縣志.

(10) 見宜稼堂叢書郁松年道光壬寅(1842)詳解九章算法札記序第一頁,及宋景昌詳解九章算法札記第一頁.

清之中葉,書忽失傳,故阮元疇人傳(1799)卷二十二,宋楊輝論,稱:輝所稱算書,十書而外,今無一存者.又羅士琳疇人傳(1840)卷四十七稱阮相國(元)訪之三十年,通人學士,俱未之見.又宜稼堂叢書本嘉慶甲戌(1814)李銳楊輝算法跋稱:向聞錢景開言曾有楊輝算法售與一浙人,三十年來博訪通人,皆未之見.

阮元於嘉慶庚午(1810)以少詹事在文穎館總閱全唐文,於永樂大典中鈔得楊輝摘奇及議古等百餘番.嗣督漕淮安,屬江上舍鄭堂(藩),排比整齊之,然掇於殘賸之餘,究非全帙也.語見清羅士琳疇人傳四十七.

李銳楊輝算法跋(1814)亦稱:歲庚午(1810)應順天試,留京師,在李雲門侍郎(潢)寓邸,見雜鈔算書約百餘番,乃阮芸臺中丞(元)提調文穎館時,從永樂大典中摭錄者.中有楊輝摘奇數條,始得略覩梗概,究未見全書也.

歙人鮑廷博於乾隆丙申(1776)以後,陸續刊刻知不足齋叢書,至二十七集,未竟而卒,其二十七集中有續古摘奇算法一卷.與透簾細草及丁巨算法共刻一册.當并出於永樂大典.惟未審卽阮元之所掇拾者

否!

嘉慶甲戌(1814)夏,黃丕烈於同郡故家得楊輝算法,皆散葉,且顚倒錯亂殊甚.暇日招李銳至百宋一廛相與驗其文義,排比整齊,得書六卷,首尾序目無缺失.亟命工裝成一巨册,櫝而藏之.由是識與不識,咸知爲希世寶矣[11].羅士琳聞黃丕烈得宋刊楊輝算法屬何元錫(1766-1804)假錄其副![12]

李銳排比所得六卷,蓋因田畝比類乘除捷法爲二卷,算法通變本末爲一卷,乘除通變算寶爲一卷,算法取用本末爲一卷,續古摘奇算法爲一卷,共得六卷也.而阮元研經室外集,阮氏經進書提要作楊氏算法三卷,或楊輝算法三卷.蓋分田畝比類乘除捷法及算法通變本末爲上卷,乘除通變算寶爲中卷,算法取用本末爲下卷,末附續古摘奇.淸李兆洛養一齋文集卷七,跋楊輝算法,亦作三卷.惟深歎續古摘奇惜無從見,蓋續古摘奇之非全帙,顯而易見也.

道光壬寅(1842)郁松年刻毛嶽生家藏本詳解九章算法,又續刻楊輝算法六卷於其.楊輝所箸詳解

(11) 宜稼堂叢書本,李銳楊輝算法跋.

(12) 淸羅士琳疇人傳四十七.

九章之後,並由宋景昌校讎,別作札記,附於書後,列於宜稼堂叢書之內.

就中續古摘奇算法一書,雖宜稼堂叢書本,知不足齋叢書本,及莫友芝藏諸家算法本所收互有詳略,終非全帙也.

其在國外,宋楊輝算法一書,頗有流傳.朝鮮於宣德八年(1482)曾重刊洪武戊午本行世.其田畝比類乘除捷法後,有跋,詳記其事,謂觀察使臣辛引孫,引奉內旨,慶府尹臣金乙辛,刊官李好信命工鋟梓云.而朝鮮重刊算學啓蒙金始振於順治十七年(1660)序,亦稱歲丁酉(1657)居憂抱病無外事,適得鈔本楊輝算書於今金溝縣令鄭君瀁.

日本石黑信由(1760–1836)算法書籍目錄載有:大明宣德八年宋楊輝算法三册,稱:本書爲關孝和所傳寫,時寬文元年歲次辛丑(1661).此書著錄乘除,加減,田畝算法,河圖,洛書,方陣,町見,翦管,等術[13].

現在日本東京所藏宋楊輝算法計有三部,一在

(13) 此書今藏日本帝國學士院.參看:和算圖書目錄第744頁,昭和七年四月東京.

宮內省[14]，一在內閣文庫，一在大塚高等師範學校.日人三上義夫在日本初發現關鈔足本楊輝算法時，曾於大正二年四五月，數學世界第七卷五，六號，著有『關於楊輝算法之一節』一文，記錄其事.李儼亦於民國八年北京大學月刊第一卷第四號，中國數學源流考略內，引續古摘奇算法上卷縱橫圖之說.

國立北平圖書館今亦藏有朝鮮刻本宋楊輝算法，爲楊守敬旅日本時所收購者.

此外楊輝所著書，惟日用算法二卷，及詳解算法二書，世尚無傳本.續古摘奇算法序稱：又以乘除加減爲法，秤斗尺田爲問，目之曰日用算法.又算法通變本末卷上稱：詳解算法第一卷，有乘除，立問一十三題，專說乘除.今於諸家算法及永樂大典殘本卷一六三四三之一·六三四四中，尚可輯得若干條.

2. 輯佚

楊輝日用算法

(14) (宮內省)圖書寮漢籍善本書目卷三第四十一頁記宋楊輝算法四種三册，稱：『……卷尾有宣德八年(1482)癸丑五月日慶州府板刊一行并列銜，文政中毛利出雲守高翰所獻幕府，首有「成山苗裔」，「南宮氏厚」，「佐伯侯毛利高標字培私藏書畫之印」諸印記』.

序

萬物莫逃乎數.是數也,先天地而已存,後天地而已立.蓋一而二,二而一者也.自非參錯妙用,隱括衆微,未易窮此.錢塘楊輝以廉飭己,以儒飾吏,吐胸中之靈機,續前賢之奥旨,從奇而耦,由晦而彰.內可以知外,表可以識裏.其用心豈爲運牙籌,計金穀而已哉!國學前廡永嘉陳幾先跋.

又序

夫黃帝九章乃法算之總經也.輝見其機深法簡,嘗爲詳註.有客諭曰:謂無啓蒙日用,爲初學者病之,今首以乘除加減爲法,稱斗尺田爲問,編詩括十三首,立圖草六十六問,用法必載源流,命題須責實有.分上下卷首少補日用之萬一,亦助啓蒙之觀覽云耳.景定壬戌季夏錢塘楊輝謹序.

稱則三百斤稱,謂之十鈞.一百二十斤稱,謂之一石.一百斤稱,謂之市稱.三十斤稱,謂之一鈞.十五斤稱,謂之一稱.一斤稱,謂之分兩稱.一兩等二,一管分釐毫,一管銖,絫,黍.一兩重十錢,一錢管十分,一分管十釐,釐下雖有數,細瑣衡不載.一兩重二十四銖.一錢管二十四絫,一分管二十四黍.

今有物一百一十二斤,足稱,問爲省稱幾何?

答曰:一百四十斤.

解題:此問足斤展省,用加爲法.題不帶零兩,驗其術.

術曰:以斤數爲實.實即身也.身外加二五,身外即是身後.從尾上加起,且如足稱一百,展省稱一百二十五斤.故占原數爲身,只身後加上二十五斤之數.草曰:斤數爲實,置足稱一百一十二斤爲本身,斤上只定得斤.身外加二五,得一百四十斤,合問.其一術曰:以斤數爲身,於上定十斤,三度折半,斤數爲身,以斤定十者,是借十爲百.凡三度折半,得十二斤半.草曰:以斤數爲身,置一百一十二斤,於一斤上定十斤,是借爲一千一百二十斤.三度折半,得一百四十斤合問.

今有物三百一十三斤,足稱,問爲省稱幾何?

答曰:三百九十一斤四兩.

解題:此問全斤展出零兩,於前法稍異.術曰:斤數爲實.題數爲身.身外,身尾上起,加二五,是增上二十五斤.如斤外零分,用加六爲兩,錢絹斗器,以十分爲率,今稱以一百六十爲斤,均爲十分.是以十六爲一分,故加六爲兩,今以零分爲兩,及零兩爲分,列成數在後.草

曰:斤數爲實,置足稱三百一十三斤爲身,斤上只定斤,身外加二五,自尾位加起得三百九十一斤,二分半.斤外零分加六爲兩,二分半上加六,得四兩,併上數,合問.

零分求兩定數. 一分足稱二十,省稱一兩六錢.二分足稱四十,省稱三兩二錢.三分足稱六十,省稱四兩八錢.四分足稱八十,省稱六兩四錢.五分足稱一百,省稱八兩.六分足稱一百二十,省稱九兩六錢.七分足稱一百四十,省稱十一兩二錢,八分足稱一百六十,省稱十二兩八錢.九分足稱一百八十,省稱十四兩四錢,十分足稱二百,省稱百六十,皆一斤.兩還分,用四折半.

零兩求分定數. 一兩六釐二毫半.二兩一分二釐半.三兩一分八釐七毫半.四兩二分半.五兩三分一釐二毫半.六兩三分七釐半.七兩四分三釐七毫半.八兩五分.九兩五分六釐二毫半.十兩六分二釐半.十一兩六分八釐七毫半.十二兩七分半.十三兩八分一釐二毫半.十四兩八分七釐半.十五兩九分三釐七毫半.十六兩十分.分還兩,用加二五.

今有物一百二十三斤五兩,足稱,問省稱幾何?

答曰:一百五十四斤二兩二錢半.

解題:此問斤中展出兩,其零腳又有兩,以驗歸併之術.術曰:各置斤兩數,斤兩不同,故用各置.身外加二五,如零斤外零分,用加六求兩,並如前解.草曰:各置斤數兩數,置一百二十三斤在上五兩在下.身外加二五,一百二十三斤加為一百五十三斤七分半,其五兩加為六兩二錢半.斤外零分加六求兩,七分半加六,為十二兩,併所得一百五十四斤二兩二錢半,合前問.其一術曰:置斤數以零兩用四度折半,四折半卽是分為十六處.求分併之,求見分數,可綴斤尾.用本法身外加二兩,斤外零分加六還兩,前術有解.草曰:置斤數一百二十三斤以兩數四折半求分,五兩得三分一釐二毫半,併之,共得一百二十三斤三分一釐二毫半.身外加二五,斤上定斤,身後加二五,得一百五十四斤一分一釐六絲二忽半斤外零分,加六還兩以一分四釐六絲二忽半,分上定兩,加六得二兩二錢半,併一百五十四斤,合問.其一術曰:通斤數為兩,以零兩併之,用身外加二五.此法只展得省兩.仍以十六兩為法,求原斤.蓋題中有斤,故求斤還原.草曰:通斤數為兩,置一百二十三

斤,以每斤十六兩,通爲一千九百六十八兩,以零兩併之,併零五兩,共得一千九百七十三兩身外加二五,得二千四百六十六兩二錢五分,仍以十六兩爲法,還斤.得一百五十四斤二兩二錢半.

今有物一百四十斤,省稱,問爲足稱幾何?

答曰:一百一十二斤

解題:此問驗全斤,省稱歸足.術曰:以斤數爲實,用八因之,十斤上定斤,十斤省稱重一貫六百,其足稱八斤,亦重一貫六百.凡十斤省稱,即是八斤足稱,故用八因.草曰:以斤數爲實,置一百四十斤,以八因之,得一百一十二斤,合問.

今有物三百九十一斤四兩省稱,問足稱幾何?

答曰:三百一十三斤.

解題:此問驗零兩省稱歸足.術曰:以斤數爲實,用八因之.十斤上定得一斤.遇零兩欲爲分者折半,一兩省稱是十文,其一斤足稱.是二百.其一分即是二十,是用折半.零分欲還兩者倍之,一分定二十文,即是明減二兩,故倍之.草曰:以斤數爲實,三百九十一斤用八因之,十斤上定得一斤,因得三百一十二斤,餘八分四兩零兩,欲爲分者,折半.四兩折半爲二

分,共為三百一十三斤.合問.

今有錢六貫八百文,買物一斤,問一兩直幾何?

答曰:四百二十五文.

解題:以斤求兩價為問,驗諸術,可以通用.其術有五:一曰:斤價為實,四度折半,貫上定貫,暗分為十六.草曰:斤價為實,置六貫八百文,四度折半,即是四次折半,得四百二十五,合問.

二曰:念法,以數累成念法.尾位求起,一求隔位六二五,斤價一貫,每兩該六十二文半是隔一位.二求退位一二五,斤價二貫,每兩該一百二十五文,即是退一位.三求一八七五記,斤價三貫,每兩一百八十七文五分.四求改曰二十五,斤價四貫,其一兩得二百五十.五求三一二五是,斤價五貫,共兩價三百十二文半.六求兩價三七五,斤價六貫,其兩價三百七十五文.七求四三七五置,斤價七百,其兩價四十三文七分半.八求轉身變作五,斤價八百,其兩價五十文.兩歸斤者,身外加六,十上定百.草曰:斤價為實,置六貫八百文.如念法,於尾位求起.百上定十,先命八百為五十,後命六貫為三百七十五,共四百二十五.合問.

三曰:斤價爲實折半,取十六兩爲八兩價.八歸是取八兩爲一兩價.草見後圖.

斤價折半,貫上定百。

𝍫 四十文

𝍢 爲三百

求第一位

𝍫 加六

𝍢 見三

求第二位

𝍣 下四

𝍩 起八,見二

𝍣 或十

求第三位

𝍣 見四作五

𝍩

𝍣 共得四百二十五,合問

四曰:斤價爲身,身內存十減六. 斤價分爲十六兩,存留十兩價,減去六兩,於價貫上定百爲一兩之價. 草見後圖.

減第一位

𝍧
減去二百四十
𝍣
未減數四十

貫上定百
𝍮
借爲六百八十
存得數四百
𝍫
存得數四百

減第二位

𝍯
此位未減

𝍣
存二十減去十二
𝍡
存四百二十

定百
𝍫
存得四百
𝍫

減第三位

𝍯
存五減三十
𝍬
每兩得四百

𝍡
存四百二十
𝍡
二十五文

定百
𝍫
𝍫

五曰,斤價爲實,以十六兩爲法,除之,是以斤價分爲十六處,求一兩之價.草見後圖.

商第一位

兩價 𝍫 ⊥

定百 ⊥ 一

商 實 法

上商四百

商 ≡ ||||

實 〇 ||||

法 一 T

除實六

貫四百

商第二位

次商二

得數 ≡ ||

實 〇 〇 ≟

法 | T

除實三百二十

商第三位

次商五

得數 ≡ || ≡

除實適盡 〇 〇 〇

法 一 ⊥

除實八十適盡,

得四百二十五。

今買物三十七斤九兩,每斤一貫一百二十,問共值錢幾何?

答曰:四十二貫七十文.

解題:上問是以斤展兩,驗其通分,不以兩價爲問,而以斤價爲問.術曰:斤通爲兩,以兩併之,取其一也.以斤價乘之,一斤價不可折兩,或折兩法位頗繁,故以混成斤價爲乘.以兩法十六除之,先以斤價乘兩,故以斤中十六兩爲法,還求斤價.草曰:斤通爲兩,得五百九十二兩,以兩併之,得六百一兩.以斤價乘之,兩上定實,以全斤之價一貫一百二十,乘得二百七十三貫一百二十.以十六除之,得所答數,合問.

今買物六百一兩,每斤價一貫一百二十,問共錢幾何?

答曰:四十二貫七十文.

解題:此問與前同,但不通分,直云幾兩,用法稍異.術曰:兩數爲實,以斤價求爲兩價乘之,斤價求兩者,免全斤爲乘,亦免乘訖再除之繁.草曰:兩數爲實,置六百一兩,以斤價求兩價一貫一百二十,用本法四折半求得兩價七十文.乘之,得四十二貫七十文,合問.

今出錢四十二貫三百五十,買物三十七斤一十三兩,問一斤價錢幾何?

答曰:一貫一百二十文.

解題:及前題以出錢買物爲問,以驗斤通兩爲法,求一斤之價.術曰:通斤併兩爲法;取其一也,以法除之.以十六兩乘出錢總數爲實.兩爲法,只除得兩價,故以十六乘都錢,是得斤價也.草曰:通斤併兩,通三十七斤爲兩,併上十三兩,共得六百五兩.以十六兩乘出錢總數爲實,十六乘四十二貫三百五十,得六百七十七貫六百文.以法除之,以六百五兩爲法,一百貫上定實.除得斤價一貫一百二十.

案以上楊輝日用算法殘本題問見諸家算法中.

菽每石七百八十五文,麥每石一貫一百六十文.用錢二百九十七貫,糴到菽麥共三百石,問本各幾何?

答曰:菽一貫三十六石,麥一百六十四石.

解題:菽麥爲問,分身爲法.分率術曰:共物爲實,以賤率乘之.俱爲賤價.以減總錢,餘爲貴實.貴物所多之數.貴賤二率相減,餘爲法,求見一價所多之差,除之先見貴物.以貴物減總數,餘爲賤也.

麥百六十四石　菽百三十六石

一貫一百六十文麥價

積一百二十八貫七百四十文

積一百六貫七百六十文

七百八十五文菽價

多菽三百七十五

積六十一貫五百

菽麥共三百石，共錢二百九十七貫文。

草曰:共物爲實,菽麥共三百石,以賤率乘之,菽賤每石七百八十五文,乘得二百三十五貫五百文.以減總數,二百九十七貫,餘爲貴實,六十一貫五百.貴賤二率相減餘爲法,菽石價七百八十五,麥石價一貫一百六十文,相減餘三百七十五,爲法.除之.以法除六十一貫五百文.先得貴物.麥一百六十四石.以貴物麥也,減總數,菽麥總數,餘爲賤實.菽得一百三十六石.合問.

案此題見永樂大典卷一六三四三第十九及二十頁.

楊輝詳解算法.

香三千二百四十六兩,每三兩價錢四貫一百文,問錢幾何?

答曰:四千四百三十六貫二百文.

解題.先以三兩總價乘後,以三爲除,即是小乘除.草曰:香數爲實三千二百四十六兩,每三兩價錢爲法相乘,三兩價錢四貫一百,乘爲一萬三千三百八貫六百文,是三倍之數,以三除之.是去其二停多數,仍於兩上定百合問.

錢七貫九百八十文,買物每斤價錢二貫三百四

文,問買幾何?

答曰:三斤七兩十銖.

解題:本是商除,祇緣求斤之外,餘不及者,不以斤價求兩,而以兩以銖之數乘餘錢求之,可謂巧矣.草曰:錢數爲實,七貫九百八十,物價爲法,二貫三百四文.以法除實.貫上定斤得三斤,餘一貫六十八文,不滿一斤之數,祇可求之爲兩,若以斤價紐兩價求之,算不勝其繁也.故用斤之一十六兩乘餘錢.仍以斤價除之,又得七兩,尚餘九百六十,又不及兩價,祇當求之爲銖.如前以兩之二十四銖乘餘錢,仍以斤價除之,合問.

案以上楊輝詳解算法二題問見諸家算法中.

錢一十八貫七百文九十八陌,欲展七十七陌官省,問得幾何?

答曰:二十三貫八百文.

解題:卽粟米換易之間,蓋錢陌求錢陌所以不深於法也.草曰:九十八陌乘總錢,此要者乘以九十八陌,乘一十八貫七百,得十八貫三百二十六文足.以官省七十七除之.十上定百得所答數.又草曰:指南用加四減一,以代乘除.一貫一百文,九十八陌,可展七十七陌,錢一貫四百,故用加四減一之法.置

總錢,一十八貫七百文,加四,得二十六貫一百八十文.減一所得合問.

錢二十貫,買四百六十尺,綾每尺四十三,羅每尺四十四,問綾羅價幾何!

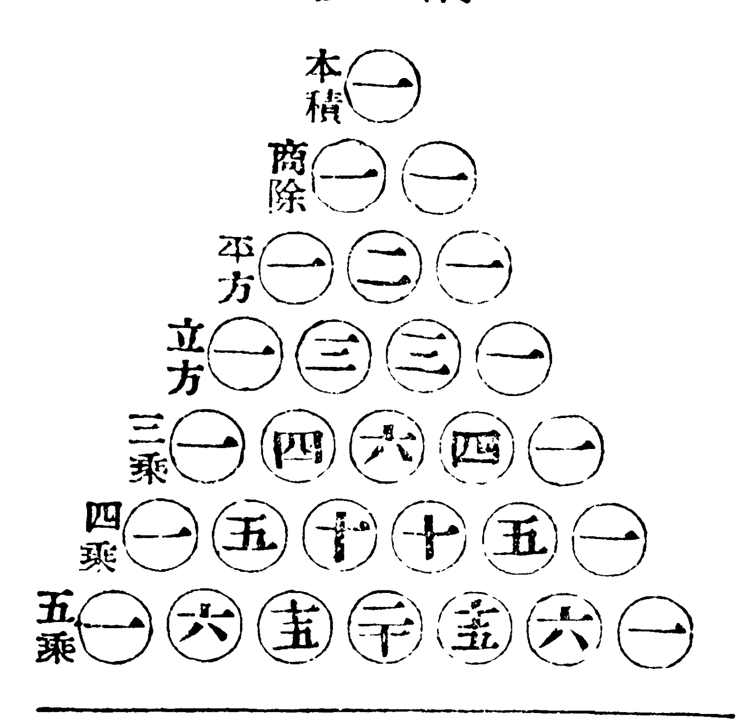
答曰:二百四十尺,尺四十三. 二百二十尺,尺四十四.

解題:反用前問,二價相和,俗曰,粟參分身.草曰:以貴價乘都數,貴價每尺四十四,乘四百六十,得二十貫二百四十,內多二百四十.以原錢減餘爲實.原錢二十貫減之餘二百四十.貴賤二價相減餘爲法.四十三減四十四餘一,以法除實得二百四十.卽賤物數.以減都數,求貴物之數.

開方作法本源.出釋鎖算書,賈憲用此術.

增乘方求廉法草曰:釋鎖求廉本源,列所開方數如前五乘方,列五位,隅算在外.以隅算一,自下增入前位,至首位而止.首位得六,第二位得五,第三位得四,第四位得三,下一位得二.復以隅算如前陞增,遞低一位求之.

左積 右隅



左袤乃積數。
右袤乃隅算。
中藏者皆廉。
以廉乘商方。
命實而除之。

求第二位.

六,舊數,五加十而止,四加六爲十,三加三爲六,二加一爲三.

求第三位.

六, 十五,幷舊數,十加十而止,六加四爲十,三加一爲四.

求第四位.

六, 十五, 二十, 幷舊數, 十加五而止, 四加

一爲五.

求第五位.

六. 十五, 二十, 十五, 幷舊 五加

一爲六,

上廉, 二廉, 三廉, 四廉, 下廉.

積一百六十四萬四千八百六十六尺四寸三分七釐五毫, 問爲立圓徑幾何?

答曰: 一百四十三尺.

解題: 立圓其狀如毬, 居立方十六分之九. 立圓法曰: 以方法十六乘積, 如圓法九而一爲實. 平圓居平方四分之三, 更添一乘爲立圓立方, 其立圓居立方十六分之九, 取以爲法, 十六乘. 九而一, 卽互換之意. 開增乘立方除之. 前注. 草曰: 置積題數, 以方法十六乘之, 以九除之爲實. 得二百九十二萬四千二百七尺. 開增乘立方除之. 立草在九章卷首布置圖內.

積一百三十三萬六千三百三十六尺, 問爲三乘方幾何?

答曰: 三十四尺.

解題: 三度相乘, 其狀區直. 遞增三乘開方法草曰:

上商得數下法增爲立方除實,卽原乘意.置積爲實,別置一算名曰下法,於實末常超三位約實.一乘超一位,三乘超三位,萬下定實.上商得數三十乘下法生下廉三十,乘下廉生上廉九百.乘上廉生立方二萬七千.命上商除實,餘五十二萬六千三百三十六.作法商第二位卽數,以上商乘下法入下廉共六十.乘下廉入上廉共二千七百.乘上廉入方共一十萬八千.又乘下法入下廉共九十.乘下廉入上廉共五千四百.又乘下法入下廉共一百二十.方一,上廉二,下廉三,下法四退.方一十萬八千,上廉五千四百,下廉一百二十,下法定一.又於上商之次,續商置得數,第二位四.以乘下法入廉,一百二十四.乘下廉入上廉,共五千八百九十六.乘上廉併爲立方,一十三萬一千五百八十四.命上商除實盡.得三乘方一面之數.如三位立方.俟第二位取用.又術曰:兩度開平方.開第一次平方得一千一百五十六,開第二次平方得三十四.

案以上楊輝詳解算法見永樂大典卷一六三四三之一六三四四中.

東方圖書館善本算書解題

民國十九年二月,由靈寶繞道武漢南下,至京滬杭閱書.於二月二十七日起,在上海東方圖書館觀所藏善本算書,先後影攝傳鈔得若干種.二十一年一月二十九之變,東方圖書館全燬,藏書不復留於天壤.幸當時或經影攝鈔藏,或曾題錄記跋,今舉要引述數種如左,爲修治吾國數學史者之參考.

其書籍號數,并依該館原有鈔本目錄所記次序,藉留原來面目,并資紀念.

子一三一號

數學舉要卷五,卷六,卷七,卷十,卷十三,卷十四,淸陳世明撰,殘本二册.

數學舉要五册,淸揚州陳世明撰,南海馮氏藏鈔本,現藏浙江義烏縣朱一新之長子家.裘沖曼中國算學書目彙編(見淸華學報三卷一期,民國十五年六月)曾經著錄,裘君并於民國六年親見此書

東方圖書館所藏係殘本二册,計存卷五,卷六,卷七,卷十三,卷十四,凡六卷.

許宗彥鑑止水齋書目尙藏有數學舉要五册(見圖書館季刊五卷三四期,民國二十年十二月).

子三七三號

幾何用法一卷,明孫元化撰一册.

幾何用法一書,李儼曾著錄於增修明代算學書志(見圖書館季刊五卷一期,民國二十年三月)今錄如左.

豐順丁氏持靜齋書目有幾何體論一卷,卷後有慶餘心齋諸印,又有幾何用法一卷,卷後題道光己酉春烏程慶餘校讀一過,又有慶餘疇人子弟諸印.

「孫元化嘉定人字初陽,天啓舉人,從徐光啓游,得西洋火器法,崇禎初起兵部員外郎,以孔有德變,棄市.」見中國人名大辭典第七五〇頁.

上海東方圖書館藏鈔本孫元化幾何用法一册,凡四十八葉,前有序,稱:「予先師受幾何於利泰西,自丙午始也.……戊申(1608)纂輯用法,別爲一編,以便類考.……十餘年無有問者,稍示究心,則

借鈔用法止矣.……庚申(1620)武水錢御冰忘年勢而下詢,當暑孜孜,似欲爲此書拂塵蠹者.而余因檢篋中原草,已烏有,聊復追而志之.然載於幾何者固在,若舊纂則多所推廣,究不能盡憶,尚冀異日者,幸遇友人鈔本借以補之.」

按徐光啓句股義稱:「句股自相乘,以至容方,容圓,各和各較相求者,舊九章中亦有之,第能言其法,不能言其義也.所主諸法,蕪陋不堪讀,門人孫初陽氏刪爲正法十五條,稍簡明矣.余因爲論撰其義.」是孫元化曾立正法十五條,而徐光啓爲之論撰成句股義也.

子四一八號

九章算法比類大全十卷明吳敬撰,明刻本,八册.

上海東方圖書館藏有九章算法比類大全十卷明吳敬撰,明刻本,八册,李儼曾影攝一份,共六百五十四頁,前有明景泰元年(1450)七月杭州府仁和縣儒學教諭臨川聶大年序,同年(1450)孟秋錢唐吳敬信民自序,弘治元年(1488)項麒序,吳興張寧及同郡孫暲像贊.吳書自序稱:

…………故算數之家,止稱九章算法爲宗,世傳

其書出於周公,然世罕口口,無習而貫通者.予以草茅末學,留心算數,蓋亦有年,歷訪九章全書,久之未見;一日口獲寫本,其目二百四十有六,內方田,粟米,衰分,不過乘除,互換,人皆易曉.若少廣中口多益少,開平方圓,商功之修築堆積,均輸之遠近勞費,其法頗雜.至於盈朒,方程,勾股,題問深隱,法理難明,古註混淆,布算簡略,初學無所口明,由是通其術者鮮矣.輒不自揆,採輯舊聞,分章詳註,補其遺闕,芟其紕繆,粲然明白,如指諸掌.前增乘除開方起例之法,中添詳註比類,歌詩之術,後續鎖積演段還源之方,增千二百題.通古舊題,總於四百餘問,數十萬言,釐爲十卷,題曰九章算法比類大全.積功十年,纔克脫藁,而年老目昏,乃請口宮雋士何均自警書錄成帙,自便檢閱.金臺王均士傑見而重之,恐久遂湮沒,爰雲集好雅君子口口口口口口等命工鋟梓,以廣其傳.若夫聖人經天緯地之算,則固非區區之所敢聞也.

時景泰元年(1450)歲在庚午孟秋吉日

錢唐吳敬信民識

弘治元年(1488)項麒序則稱吳敬杭州府仁和縣人,號主一翁.因善算,一時藩臬重臣,皆禮遇而信託之.初版刻後,板燬於火,十存其六.翁之長嗣怡庵處士命其季子名訥字仲敏而號循善者,重加編校,而印行之云.

是書首目錄起例,題爲九章詳註比類算法大全目錄,及九章詳註比類乘除開方起例.

次方田題爲九章詳註比類方田算法大全卷第一

次粟米題爲九章詳註比類粟米算法大全卷第二

次衰分題爲九章詳註比類衰分算法大全卷第三

次少廣題爲九章詳註比類少廣算法大全卷第四

次商功題爲九章詳註比類商功算法大全卷第五

次均輸題爲九章詳註比類均輸算法大全卷第六

次盈朒題爲九章詳註比類盈不足算法大全卷

第七

次方程題爲九章詳註比類方程算法大全卷第八

次句股題爲九章詳註比類句股算法大全卷第九

次開方題爲九章詳註比類還源開方算法大全卷第十

子四八四號

測圓海鏡十二卷;元李治撰,淸孔廣森校,鈔本四册,一函.

東方圖書館藏測圓海鏡十二卷,元李治撰鈔本四册一函,中有孔廣森 (1752-1786) 硃筆批校二十七條,其一條題歲在乙巳 (1785) 九月初七日森識.廣森次年卽卒去,故批校僅及一,二,三,七,四卷.

孔廣森少曾師事戴震 (1724-1777) 及官翰林,與窺中祕,得見王(孝通),秦(九韶)李(治)三家之書,其批校測圓海鏡亦多精彩之處.李儼於測圓海鏡研究歷程考(見學藝十一卷二號,民國二十年六月)曾引其疏證諸雜名目一問.并鈔藏其校語

一册收入李儼所藏中國算學書目續編(見科學十五卷一期民國十九年十一月).

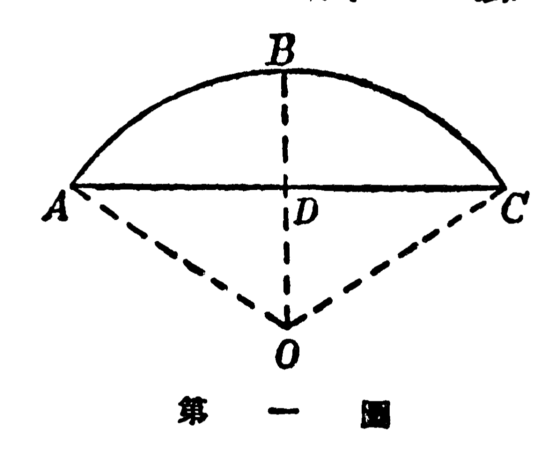
明清算家之割圓術研究

目 次

(一) 弧矢論

1. 明唐順之顧應祥程大位周述學

如圖 ABC 爲弧矢形, $OC=r$ 爲圓半徑, $2OC=d$ 爲圓徑, $AC=c$ 爲弦, $BD=b$ 爲矢, $ABC=a$ 爲弧, A 爲面積. 後此引述弧矢形或弧形率因此記法.



第一圖

明,唐順之(1507-1560)著"數論三篇,"即"句股測望論,""句股容方圓論,""弧矢論"見唐荊川文集卷十二,其"弧矢論"謂:

$$-A^2+Ab^2+db^3-1.25\,b^4=0$$ 蓋簡略朱世傑式

$$-5\,b^4+4\,db^3+4\,Ab^2-(2A)^2=0$$

而得也.其與顧(應祥)箬溪中丞第二書,見荊川集補遺卷三,稱:"僕既作爲弧矢論,以請於明公,而明公亦既演之爲書矣."則弧矢論之作,蓋在顧應祥,弧矢算術(1552)前矣.

顧應祥(1483-1565)著句股算術二卷(1553),測圓海鏡釋術十二卷(1550),弧矢算術(1552),測圓算術四卷(1553)其弧矢算術自序稱:"弧矢一術……錢塘吳信民九章算法止載一條,四元玉鑑所載數條,皆不言其所以然之故,沈存中夢溪筆談有割圜之法,雖自謂造微,然止於徑矢求弦."因幷諸說,得下式:

(1) $$d=b+\frac{(\frac{1}{2}c)^2}{b}$$

(楊輝)實出於趙君卿"句股方圓圖注."

(2) $$\frac{c}{2}=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-b\right)^2}$$ (楊輝)

(3) $b=\frac{d}{2}-\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$ (楊輝)

(4) $a=\frac{2b^2}{d}+c$ (沈括)

(5) $c^3-c^2+4bc+4b^2(2b-a)=0$

由(沈括)公式化得

(6) $2b^3-(a-c)b^2-(a-c)\left(\frac{1}{2}c\right)^2=0$

由(沈括)公式化得

(7) $4b^4+(4d^2-4ad)b^2-4d^3b+a^2d^2=0$

(郭守敬)

(8) $-3\left(\frac{1}{2}c\right)^4+2b\left(\frac{1}{2}c\right)^3+(a'b-6b^2)\left(\frac{1}{2}c\right)^2$

$+2b^3\left(\frac{1}{2}c\right)+\{b(2b^3+a'b^2)-3b^4\}=0,$

而 $a'=\pi d-a.$ (郭守敬)

(9) $b^4-(c+a')b^3+6\left(\frac{1}{2}c\right)^4b^2-(c+a')\left(\frac{1}{2}c\right)^2b$

$+3\left(\frac{1}{2}c\right)^4=0,$ (郭守敬)

(10) $A=\frac{1}{2}(b+c)b,$ (九章)

(11)　$c=\frac{2A-b^2}{b}$　(九章)

(12)　$b^2+bc-2A=0$　(九章)

(13)　$-5b^4+4db^3+4Ab^2-(2A)^2=0$　(朱世傑)

唐顧二氏之說,周述學,程大位并採之.

周述學神道大編曆宗算會(周文燭嘉靖戊午,1558撰序)卷八,"弧矢經補下"謂:"求矢之法有五;徑弦求矢如(3),徑背求矢,得 $b=\frac{d^2(\frac{1}{2}a)^2}{(d^3-d^2b)+(ad-b^2)b}$,徑積求矢如(13),積弦求矢如(12),殘周及弦求矢如(9).求徑之法有二;積矢求徑,得 $d=\frac{A^2-Ab^2}{b^3}+1.25b$,乃由(3)化得.矢弦求徑如(1).求積之法有一;矢弦求積如(10).求背之法有一;徑矢求背如(4)."元授時曆"弧容直闊,"李善蘭曾爲補草,見算牘初編.而曆宗算會卷七,"弧矢經補上"則周述學已先言之.

程大位算法統宗(1593)卷三,卷六,亦論弧矢術.

2. 清,梅瑴成,陳世佶

梅瑴成(1681–1763)赤水遺珍以借根方法解

$$-(2A)^2+4Ab^2+4db^3-5b^4=0$$

畫三乘方 b^4 爲長柱形,惟 b^4 并非有形可指,瑴成蓋誤解也.

陳世佶(字士常,海寧人,1686–1749)著弧矢割圜

一卷,謂求矢有六術,求弧弦有五術,求圓徑有四術,求積有五術,求弧背有七術,視顧應祥,周述學爲加詳.

3. 清,孔廣森,李子金

清初於弧矢術別立新術者,有孔廣森,李子金.

孔廣森(1752–1786)䣭軒孔氏所著書少廣正負術外篇上內"割圜弧矢十術,"其弧矢新式有四:

$$(1)\quad b=\sqrt[3]{A^2/1.5\,d},\qquad 而\qquad A>\frac{1}{5}\cdot\frac{\pi d^2}{4}.$$

$$(2)\quad b=\sqrt[3]{(3\,A)^2/27\frac{d}{2}},\qquad 而\quad \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi d^2}{4}>A>\frac{1}{15}\cdot\frac{\pi d^2}{4}.$$

$$(3)\quad b=\sqrt[3]{(5\,A)^2/81\frac{d}{2}},\qquad 而\quad \frac{1}{15}\cdot\frac{\pi d^2}{4}>A>\frac{1}{30}\cdot\frac{\pi d^2}{4}.$$

$$(4)\quad b=\sqrt[3]{(7\,A)^2/81\,d},\qquad 而\quad \frac{1}{30}\cdot\frac{\pi d^2}{4}>A.$$

廣森自謂:量田演段,期於步分無差而已,故略分四例,視弧之大小,進退消息,以定矢實,視舊法頗加密.又謂

$b^{\frac{1}{2}}=x$

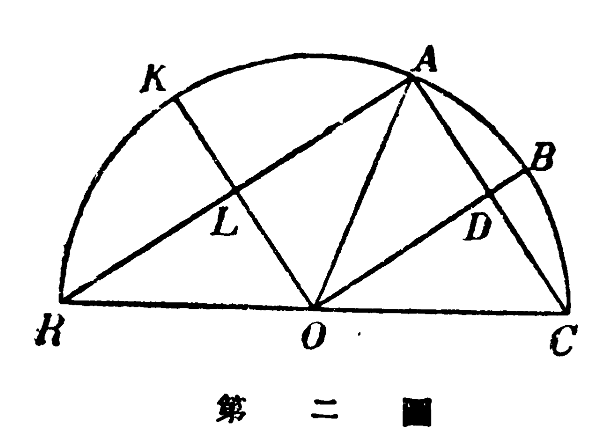
則

$$x^8+2d^{\frac{1}{2}}x^7+dx^6+(4d^2-2ad)\,x^4-2ad^{\frac{3}{2}}x^3-4d^3x^2+a^2d^2=0.$$

李子金著算法通義五卷(1677),其卷一有"弧矢

論,"稱:"欲以矢弦求背,必先以矢弦求積,而求積之法,復自古難之,予沈思數年,於無法中求爲有法,始創立一術,雖不敢謂天然巧合,亦庶乎至密而可用矣."

如圖弧背,$ABC=a$,圓徑,大弦,$RC=d$,正弧之弦,大句,$AC=c$,$\frac{c}{2}$ = 小句.餘弧之弦,大股,$AR=c_1$,$\frac{c_1}{2}$ = 小股.正弧之矢,$BD=b$,正積 $ABC=A$.,餘弧之矢,$KL=b_1$,餘積 $AKR=A_1$.



第二圖

而 $$c_1=\sqrt{d^2-c^2},\ b=\frac{d}{2}-\frac{c_1}{2},\quad b_1=\frac{d}{2}-\frac{c}{2}.$$

令 $b(3c+b)=\phi$ 爲正率,$b_1(3c_1+b_1)=\phi_1$ 爲餘率,

$$A+A_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{cc_1}{2},$$

則 $$A=\frac{\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{cc_1}{2}\right\}b(3c+b)}{b(3c+b)+b_1(3c_1+b_1)}=\frac{(A+A_1)\phi}{\phi+\phi_1},$$

$$A_1=\frac{\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{cc_1}{2}\right\}b_1(3c_1+b_1)}{b(3c+b)+b_1(3c_1+b_1)}=\frac{(A+A_1)\phi_1}{\phi+\phi_1},$$

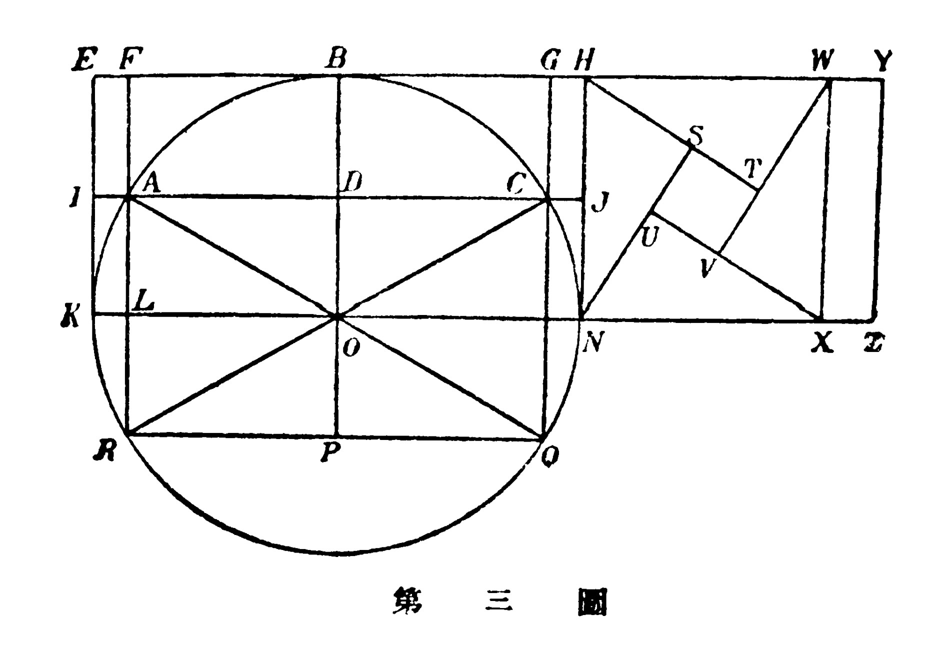
4. 李銳,駱騰鳳

李銳(1768-1817)弧矢算術細草一卷,以天元一法解析弧矢十三式,(1),(2),(3)式幷出於楊輝;(4),(5),(6)式幷出於沈括;(7),(8)式幷出於郭守敬,由楊輝,沈括二公式消去 c 而得式;(9)由楊輝,沈括二公式消去 d,幷令 $\pi=3$, $a'+a=\pi d=3d$ 而得;(10),(11),(12)式幷出於九章;(13)式則由九章及楊輝二公式消去 c 而得.

駱騰鳳(1770-1841)著藝游錄二卷,其卷二末論"弧矢"稱:"(李銳)弦與殘周求矢,徑與截積求矢二率,以下廉爲元數,尙不合率,今爲正之". 李銳原草,本自不舛,駱騰鳳新草如說亦通.

5. 謝家禾,馮桂芬,羅士琳,江衡

謝家禾著謝穀堂算學三種,卒後道光十七年(1837)戴煦爲之校刻.其弧田問率,以徽率 $\pi=3.14$,密率 $\pi=\frac{22}{7}$ 立算,因李銳弧矢算術細草設問立術,先設一圖如下:



第三圖

古半周 $EW=3\frac{d}{2}$,徽半周 $EY=3.14\frac{d}{2}$, $\square EX=3\left(\frac{d}{2}\right)^2$, $\square EZ=3.14\left(\frac{d}{2}\right)^2$ 命半弦 $HS=\frac{c_1}{2}$,外半弦 $NS=\frac{c}{2}$,半弦差 $ST=\frac{c-c_1}{2}$.弧弦 $AC=c$, 外弦 $AR=c_1$;弧背 $ABC=a$, 弧矢 $BD=b$, 外矢 $KL=b_1$, 半周差 $WY=(3.14-3)d$, 古徽圓積差 $\square WZ=(3.14-3)\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{7}{50}\left(\frac{d}{2}\right)^2$, 半弦差冪 $\square SV=\left(\frac{c-c_1}{2}\right)^2$, 角冪 $\square EA=bb_1$, 隅冪 $\triangle HSN$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c_1}{2}=\frac{1}{8}cc_1$

弧矢十三式中(1),(2),(3)式即楊輝公式,爲眞值,故與圓率之大小無關.(4)式以下因圓率之大小而變,惟爲

便利起見,先求(10)式之 $A=\frac{1}{2}\left\{bc+b^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\}$ 爲率,

逐次求(4)以下各式.

(10)有 c, b 求徽率 A.

因 $$\frac{c}{2}-\frac{c_1}{2}=(r-b_1)-(r-b)=b-b_1.$$

如圖 $$\square EZ-cc_1=\square EZ-8\cdot\frac{1}{8}\cdot cc_1=2A+2A_1.$$

則 $$2A+2A_1=bc+b_1c_1+2bb_1+(b-b_1)^2+\frac{7}{50}\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$=\left\{bc+b^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\}$$

$$+\left\{b_1c_1+b_1^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c_1\right)^2\right\}$$

故可假令 $$A=\frac{1}{2}\left\{bc+b^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\},$$

$$A_1=\frac{1}{2}\left\{b_1c_1+b_1^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c_1\right)^2\right\}.$$

如謝氏之說,則 π 無論爲何數,可得(10)之普通公式:

$$A=\frac{1}{2}\left\{bc+b^2+(\pi-3)\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\}\cdots\cdots(10)$$

(4)有 c, b 求徽率 a.

因扇形面積爲 $\frac{ad}{4}=A+\left(\frac{d}{2}-b\right)\frac{c}{2}$.

或 $4A-2bc=d(a-c)$.

從(10)式得 $\left[\frac{1}{a-c}\right]\left\{\frac{14}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2+2b^2\right\}=d$

從(1)式 $d=b+\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b}$

化得 $a=\frac{b^2(2b+c)+\left(\frac{14}{50}b+c\right)\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2}$ ……(4)

(5)有 b, a 求徽率 c.

由(4)式化得 $c^3-\left(a-\frac{14}{50}b\right)c^2+4b^2c$

$+4b^2(2b-a)=0$ ……………………(5)

(6)有 c, a 求徽率 b.

由(4)式化得 $2b^3-(a-c)b^2+\frac{7}{100}c^2b$

$-(a-c)\left(\frac{1}{2}c\right)^2=0$ ……………………(6)

(7)有 d, a 求徽率 b.

由楊輝公式 $(d-b)b=\left(\frac{1}{2}c\right)^2$, 與(4)式中之 $\frac{14}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2$

$+2b^2=d(a-c)$消去c得

$$7396b^4+2408db^3+(10196d^2-8600ad)b^2$$

$$-(1400ad^2+10000d^3)b+2500a^2d^2=0\cdots(7)$$

(8)有 b, $a'(=\pi d-a)$求徽率c.

由楊輝公式,令$x=c$得

$$314d^2=314\left[\frac{1}{4b}\right]^2(x^4+8b^2x^2+16b^4)\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

又由(10)式得

$$7x^2+200b^2=100d(a-x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

由楊輝公式得

$$100d(a'+x)=100d(\pi d-a+x)$$

卽 $$100\left[\frac{1}{4b}\right](x^2+4b^2)(a'+x)=100d(\pi d-a+x)\cdots(c)$$

$(b)+(c)$得

$$(7x^2+200b^2)+100\left[\frac{1}{4b}\right](x^2+4b^2)(a'+x)$$

$$=314d^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

由(a)及(d)消去$314d^2$得

$$-314x^4+400bx^3+(400a'b-2400b^2)x^2$$

$$+1600b^3x+\{b(3200b^3+1600a'b^2)-5024b^4\}=0$$

$$\pi \text{ 或 } -3.14\left(\frac{c}{2}\right)^4+2b\left(\frac{c}{2}\right)^3+(a'b-6b^2)\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$+2b^3\left(\frac{c}{2}\right)+\{b(2b^3+a'b^2)-3.14b^4\}=0\cdots\cdots(8)$$

(9)有 c, a' 求徽率 b.

從(8)得

$$1.14b^4-(c+a')b^3+6\left(\frac{c}{2}\right)^2b^2-(c+a')\left(\frac{c}{2}\right)^2b$$

$$+3.14\left(\frac{c}{2}\right)^4=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

(11)有 b, A 求徽率 c.

由(10)式得

$$1.75c^2+50bc-(100A-50b^2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

(12)有 c, A 求徽率 b.

由(10)式得

$$b^2+cb-\left\{2A-\frac{7}{50}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right\}=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(13)有 d, A 求徽率 b.

由楊輝公式及(10)式得

$$-4.7396b^4+3.7592db^3+\left(\frac{172A}{50}-\frac{49d^2}{2500}\right)b^2$$

$$+\frac{28\,Ad}{50}b-(2\,A)^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

如 $\pi=\frac{22}{7}$，則得；

(10) $$A=\frac{1}{2}\left\{bc+b^2+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\}$$

(4) $$a=\frac{b^2(2\,b+c)+\left(\frac{2}{7}b+c\right)\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2}$$

(7) $$144\,b^4+48\,db^3+(200\,d^2-168\,ad)b^2-(28\,ad^2+196d^3)b$$
$$+49\,a^2d^2=0.$$

(8) $$-\frac{22}{7}\left(\frac{c}{2}\right)^4+2\,b\left(\frac{c}{2}\right)^3+(a'\,d-6\,b^2)\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$+2\,b^3\left(\frac{c}{2}\right)+\left\{b\,(2b^3+a'\,b^2)-\frac{22}{7}\,b^4\right\}=0.$$

(13) $$-232b^4+184db^3+(168\,A-d^2)b^2$$
$$+28\,Adb-(14\,A)^2=0.$$

馮桂芬(字林一,吳縣人)因李銳弧矢算術細草,而作弧矢算術細草圖解,前有道光十九年 (1839) 自序,其圖多勉強湊合,於義無當.

羅士琳(字次翏,號茗香,甘泉人,?—1853)著弧

矢算術補,時在道光癸卯(1843),因弦,矢,圓徑,弧背,殘周,截積六事,交互錯綜,舉二事爲題,而求其餘,每題應得四術,共當得四十四術.顧應祥已得十三術,乃爲補二十七術,此外"有圓徑有弧背求殘周"一題,可無庸求,又"有圓徑有弧背求截積,""有圓徑有截積求弧背,""有圓徑有截積求殘周,"非立地元不可,姑闕之,適合四十四術之數.全書以天元一立術,無圖解.

光緒間元和江衡與英,傅蘭雅共譯英,哈司韋算式集要其卷一有下求弧之三略近公式:

$$a=\frac{1}{3}(8\,c_{\frac{1}{2}}-c)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而c爲通弦,$c_{\frac{1}{2}}$爲半弧通弦.

$$a=\frac{\sqrt{c^2+b^2}\times10\left(\frac{b}{2}\right)^2}{15\,c^2+33\left(\frac{b}{2}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而c爲通弦,b爲倍矢.

$$a=\frac{\sqrt{c^2+b^2}\times10\left(\frac{b}{2}\right)^2}{60\,D-27\left(\frac{b}{2}\right)}+\sqrt{c^2+b^2}\quad\cdots(3)$$

而c爲通弦,b爲倍矢,D爲全徑.

（二） 割圓舊法及周率算法

6. 明代算家所設之圜率值

明代算家之言圜率者,朱載堉謂: $\pi=\frac{\sqrt{2}}{0.45}$, $\pi=3.1426968$; 邢雲路謂: $\pi=3.126$, 又 $\pi=3.12132034$; 陳藎謨謂: $\pi=3.1525$; 方以智謂: $\pi=\frac{52}{17}$; 此外又有桐陵法 $\pi=\frac{63}{20}$, 及智術 $\pi=\frac{25}{8}$.

日本關孝和(？－1708)遺著括要算法(1709年刻)卷貞,求周徑率,謂:桐陵法,周率六十三,徑率二十,周數三一五整.

又日本村瀨義益算法勿憚改 (1673) 一書,亦曾引及桐陵算法.

按梅文鼎筆算卷五,附方田通法中,載有量田原法歌訣,謂出桐陵,惜亦不傳姓氏,疑與關氏所引,同屬一人,而爲明季隱者也.

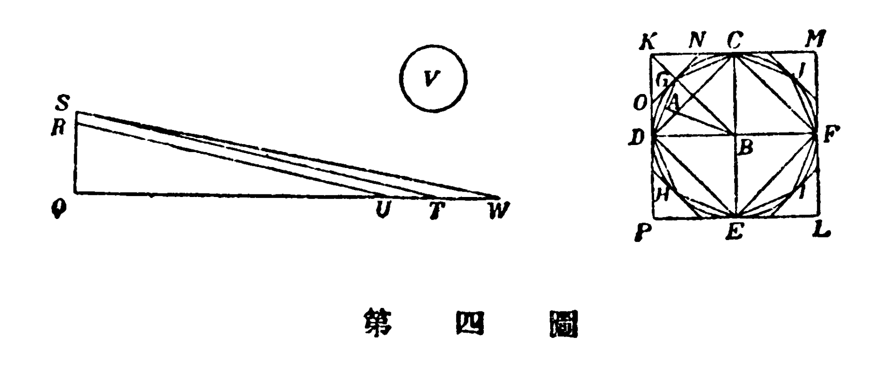
智術見於程大位算法統宗 (1593) 關孝和括要算法 (1709), 不著撰人姓氏.入清則程祿,袁士龍,顧長發,莊亨陽幷從智術,其在西洋則公元前已有人道及

此術.[1]

7. 明末西洋割圓法之輸入

崇禎辛未(1631)徐光啓與耶穌會士所修測量全義,其卷五"圓面求積"稱:"凡圓面積與其半徑線,偕半周線作矩內直角形積等.依此法則量圓形者,以半徑乘半周而已,古高士亞奇默德(Archimedes, 287?–212 B. C.)作圜書(Measurement of the Circle),內三題,洞燭圓形之理,今表而出之,爲原本焉."

第一題 "圓形之半徑,偕其周作句股形,其容與



第四圖

(1) 叔伯特(Schubert)謂;羅馬奧古士都時代,有維都維(Vitruvius)者,以周率爲十二尺半,徑率四尺,蓋亦主張 $\pi=\frac{25}{8}$ 也,見 Schubert, H., Mathematical Essay and Recreations, Tr. by McCormack, T. J., Chicago, 1903, p. 128. 馬利(Marie)謂;維都維以漢,始元丙辰(85 B. C.)生建始乙未(26 B. C.)歿.嘗著建築學理論六卷,見 Marie, M., Histoire des Sciences Mathematiques et Physiques, Paris, 1883, Tome I, p. 219.

圓形之積等."

解曰,$CDEF$ 圓形,其心 B, 其半徑 BC, 卽以爲股,(圓)形之周爲句,成QST句股形,題言兩形之容等.

論曰:設有言不等,必云大或小.云圓形爲大,句股形小者,其較爲V形.卽於圓內作 $CDEF$ 正方形,又作 $CGDHEIFJ$ 八角直線形.從心至八角形之各邊作 AB 等中垂線.試於圓形內,減其大半;所餘,又減其大半;末所餘,以比較形V,必能爲小矣.[幾何 X, 1.],如先減 $CDEF$方形,次減CJF等三角形四,末餘CG……,CJ,……等三角雜形八,必小於V形也.次作 QRU三邊形,與 CGD……八角形等,必小於QST三邊形,何者?$QR=AB<BG\ (=r)$. 先設 QRU 三邊形,及V較形,始與圓等.今 QRU三邊形,及八三角雜形適與圓等.夫$\triangle QST$大於$\triangle QRU$,V形大於八三角雜形,是合兩大形[QST及V]始與圈等,復謂合兩小形.[卽QRU及八三角雜形]與圈等,必無是理也.

次論曰:若言圜形爲小,句股形大者,其較爲V形,卽於圜外作$KMLP$正方形,又作NO…… 八角形.夫MP方形大於QST三角形者,方形之周線,大於圓形之周線也.內減其大半[卽元圜],又減其大半,[卽NOK等

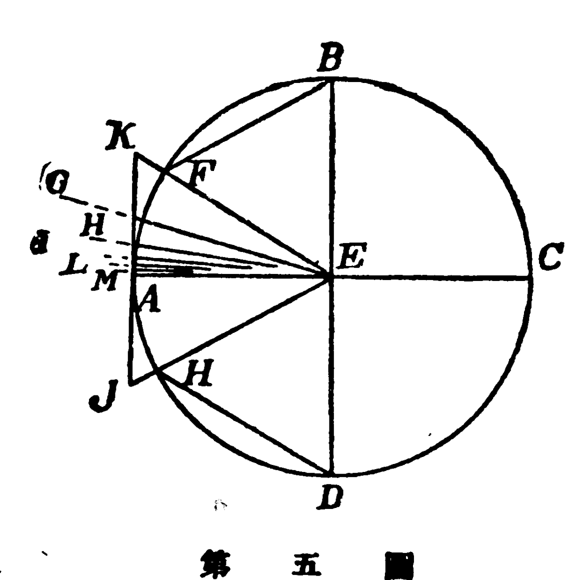
三角形也],末餘 CNG, GOD 等三角雜形八,必小於較形∨;又作 QSW 三角形與 CNO……八角形等.玆形爲圜之外切,必大於元圜,而 QW 爲外形之周,必大於 QT 內圜之周.先設圜及∨形與 QST 三角形等,今幷圜及三角雜形八[卽 CNG 等八雜形也],反大於 QST 三角形,是圜偕八雜小形而爲大者,又偕∨大形而爲小可乎!

第二題 "凡圜周三倍圜徑有奇"二支

此有二法: 其一, $3\frac{10}{70}>\pi$;

其二, $\pi>3\frac{10}{71}$;

卽 $$3\frac{10}{70}>\pi>3\frac{10}{71}.$$



第五圖

先解其一曰: $ABCD$ 圜, E 爲心; AC, BD 爲兩徑, 輳心作直角. 從 A 作 KJ 切線, 從 B 從 D 作 BF, DH 線與 BE 等. BEF 角六十度, FEA 角必三十度, 爲六邊形之半角也. 末從心過 F, 過 H 作 EK, EJ 線成 EKJ 等角形. FEH 既六十度, 則 KJ 爲等形之邊.

任設 $AK=153$, $KJ=EK=306$, $AE=\sqrt{\overline{306}^2-\overline{153}^2}=265^+$

則 $$\frac{AE}{AK}=\frac{265^+}{153},\ \left(\text{或}\sqrt{3}>\frac{265}{153}\right).$$

次平分 $\angle KEA$ 於 G,

則 $$\frac{KE}{AE}=\frac{KG}{AG},\ [\text{幾何 VI, 3}].$$

合之 $$\frac{KE+AE}{AE}=\frac{KG+AG}{AG},$$

更之, $$\frac{KE+AE}{AK}=\frac{AE}{AG},\ \frac{AE}{AG}=\frac{306+265^+}{153}=\frac{571^+}{153}.$$

令 $$\sqrt{\overline{571^+}^2+\overline{153}^2}=591\frac{1^+}{8}=EG,$$

則 $$\frac{EG}{AG}=\frac{591\frac{1}{8}^+}{153}.$$

次平分 $\angle GEA$ 於 H, 作 EH 線,

則 $$\frac{GE+AE}{AG}=\frac{AE}{AH};\ \frac{AE}{AH}=\frac{1162\frac{1}{8}^+}{153},$$

令 $$\sqrt{\overline{1162\frac{1}{8}}^2+\overline{153}^2}=1172\frac{1^+}{8}=EH,$$

則 $$\frac{EH}{AH}=\frac{1172\frac{1}{8}}{153},$$

次平分$\angle HEA$於I,作EI線,

則 $$\frac{HE+AE}{AH}=\frac{AE}{AI},\quad \frac{AE}{AI}=\frac{2334\frac{1}{4}}{153},$$

令 $$\sqrt{\overline{2334\frac{1}{4}}^2+\overline{153}^2}=2339\frac{1^+}{4}=EI,$$

則 $$\frac{EI}{AI}=\frac{2339\frac{1}{4}^+}{153}.$$

次平分$\angle IEA$於L,作EL線,

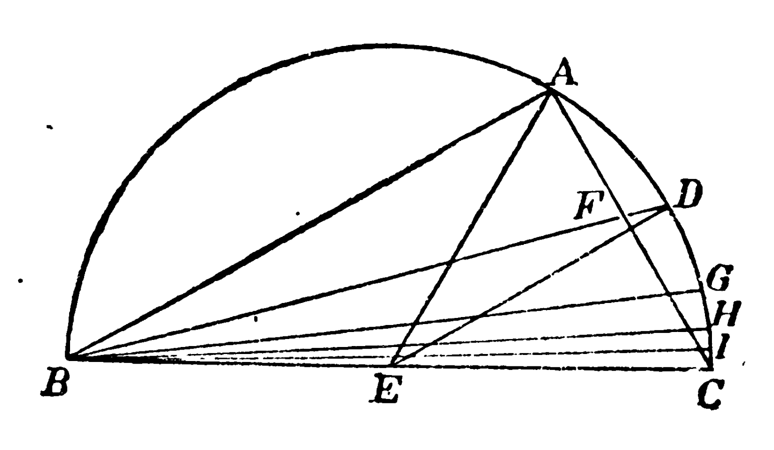
則 $$\frac{IE+AE}{AI}=\frac{AE}{AL},\quad \frac{AE}{AL}=\frac{4673\frac{1}{2}^+}{153}$$

即 $$\frac{AE}{AL}>\frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

論曰:JEK元角,爲三等角形之一,即一直角形$\frac{2}{3}$,KEA其半,即$\frac{1}{3}$;GEA其半,即$\frac{1}{6}$;HEA其半,即$\frac{1}{12}$;IEA其半,即$\frac{1}{24}$;LEA其半,即$\frac{1}{48}$.復作AEM角與IEA角等,成LEM角形.其E角爲直角之$\frac{1}{24}$,而LM弧爲

象限弧之$\frac{1}{24}$,於全周爲$\frac{1}{96}$, LAM 其切線,爲96邊形之一邊.此邊與圜全徑之比例,若AE, $4673\frac{1}{2}$與AL, 153, 末置96邊形之一邊,爲153. 因周爲14688,徑爲$4673\frac{1^+}{2}$,則96邊圜外形之周,與圜徑之比例爲$14688:4673\frac{1}{2}$約之爲$3\frac{1}{7}$不足,則徑爲1,96邊圜外周爲$3\frac{1}{7}$不足.夫形在周之外,尙不及$3\frac{1}{7}$,況圜周乎! 故$3\frac{10}{70}>\pi$.

次解其二,$3\frac{10}{71}$而盈者曰:圜內作BC徑,從C作六邊形之一邊CA與半徑EC等.[幾何 IV. 15],從B作BA成BAC形;在半圜之內,則A爲直角.[幾何 III. 31].



第六圖

設 CA, 句 $=780$; BC, 弦 $=1560$;

則 BA, 股 $=\sqrt{\overline{1560}^2-\overline{780}^2}=1351^-$

則 $$\frac{BA}{CA}=\frac{1351^-}{780},\ \left[\text{或}\sqrt{3}<\frac{1351}{780}\right].$$

次平分 $\angle ABC$ 作 BD 線, 又作 CD 線, 則 $\triangle_s BDC, CDF$ 爲相似.蓋同用 D 直角,在半圜內, AD, DC 兩相乘之弧等, 則 DCF, DBC 兩弧之角必等.[幾何 III, 21.]

故 $$\frac{BD}{DC}=\frac{DC}{DF},$$

又 $$\frac{BC}{DC}=\frac{FC}{DF},$$

更之,是 $$\frac{BD}{DC}=\frac{DC}{DF}=\frac{BC}{FC}.$$

又因 $$\frac{BC}{BA}=\frac{FC}{FA},\ [\text{幾何 VI. 3}],$$

則 $$\frac{BC+BA}{BA}=\frac{FC+FA}{FA},\ \frac{BC+BA}{FC+FA}=\frac{BA}{FA},$$

又 $$\frac{BA}{FA}=\frac{BC}{FC},$$

$\therefore$ $$\frac{BC+BA}{FC+FA}=\frac{BC}{FC},\ \text{或}\ \frac{BC+BA}{CA}=\frac{BC}{FC}.$$

又從
$$\frac{BD}{DC}=\frac{BC}{FC} \text{ 及 } \frac{BC}{BA}=\frac{FC}{FA},$$

得
$$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{FA},$$

則
$$\frac{BD}{DC}=\frac{BC+BA}{CA}, \text{或} \frac{BD}{DC}=\frac{1560+1351^-}{780}=\frac{2911^-}{780},$$

如令 $BD=2911$, $DC=780$,

則
$$BC=\sqrt{\overline{2911}^2+\overline{780}^2}=3013\frac{1^-}{4},$$

則
$$\frac{BC}{DC}=\frac{3013\frac{1}{4}^-}{780}.$$

次平分 $\angle DBC$ 作 BG 線,如前比例,論得 $\frac{BG}{GC}$ 之數,

$$\frac{BG}{GC}=\frac{BD+BC}{DC}=\frac{2911+3013\frac{1}{4}^-}{780}$$

$$=\frac{5924\frac{1}{4}^-}{780},$$

因分母數煩,今改 780 爲 240,

則
$$\frac{BG}{GC}=\frac{1823^-}{240},$$

如令 $BD=1823$, $GC=240$,

則
$$BC=\sqrt{\overline{1823}^2+\overline{240}^2}=1838\frac{9^-}{11},$$

則 $$\frac{BC}{GC}=\frac{1838\frac{9^-}{11}}{240}.$$

次平分$\angle GBC$作BH及HC線,

則 $$\frac{BH}{HC}=\frac{BG+BC}{GC}=\frac{3661\frac{9^-}{11}}{240},$$

因分母數煩,又改240爲66,

則 $$\frac{BH}{HC}=\frac{1007^-}{66},$$

令 $$BH=1007,\ HC=66.$$

則 $$BC=\sqrt{\overline{1007}^2+\overline{66}^2}=1009^-,$$

則 $$\frac{BC}{HC}=\frac{1009}{66}.$$

次平分$\angle HBC$作BI, IC線,

則 $$\frac{BI}{IC}=\frac{BH+BC}{HC}=\frac{2016^-}{66},$$

而 $$\frac{BC}{HC}=\frac{2017\frac{1}{4}^-}{66}\quad 即\quad \frac{BC}{HC}<\frac{2017\frac{1}{4}}{66}.$$

論曰:CA弧爲全圜$\frac{1}{6}$, DC爲$\frac{1}{12}$, GC爲$\frac{1}{24}$, HC爲$\frac{1}{48}$, IC爲$\frac{1}{96}$, 是IC爲96邊內切圜形之一邊也.以96乘

66,得 6336 爲 96 邊內切形之周; BC 爲 $2017\frac{1}{4}$, 兩數約之,一得 $3\frac{10}{71}$ 強,形之周也;一得 1, 圓之徑也. 夫圓周在多邊形之外卽大,則謂 $3\frac{10}{71}$,不又盈乎!故

$$\pi>3\frac{10}{71}.$$

第三題　圓容積與徑上方形之比例.

解曰:一爲 11 與 14 而朒,一爲 223 與 284 而盈.

先解朒者, BEF 圓與 ACE 方. 引長 CA 邊爲 DA, 令大於 CA 爲 $3\frac{1}{7}$ 倍,則與周等爲句. AB 邊,圓之半徑也,爲股,成 $\triangle ABD$, 其積與圓積略等. 又 $\triangle ABC$ 直角形,

因 $$\frac{CA}{DA}=\frac{7}{22},$$

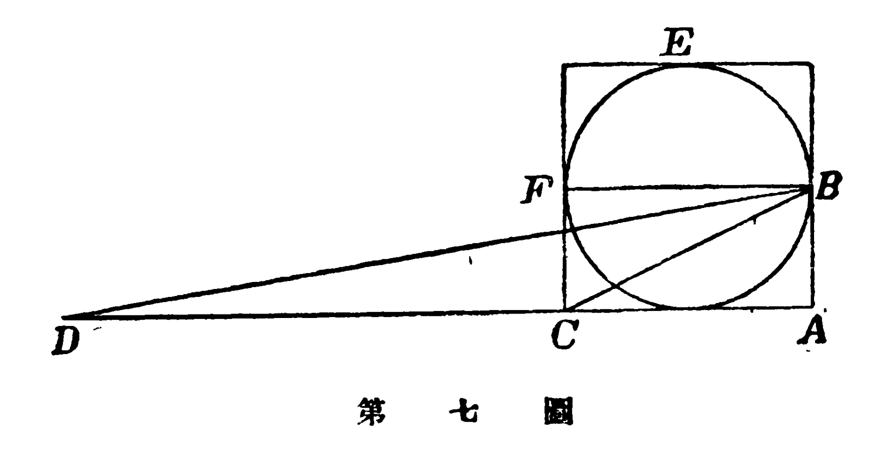
則 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD}=\frac{7}{22}.$$ [幾何 VI. 1.]

$$\triangle ABD=\odot BEF,$$

則 $$\frac{\triangle ABC}{\odot BEF}=\frac{7}{22}$$

又 $$\triangle ABC=\frac{1}{4}\square ACE,$$

則 $$\frac{\square ACE}{\odot BEF}=\frac{28}{22}=\frac{14}{11}.$$



第七圖

次解盈者,設 $CA=71$, $DA=223$,

則 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD}=\frac{71}{223},\text{ 即 }\frac{\square ACE}{\odot BEF}=\frac{284}{223}.$$

* * *

徑與周之比例,古士之法如此,今士別立一法,其差甚微,然子母之數,積至二十一字,爲萬萬億,難可施用.即

徑 100,000,000,000,000,000,000

大周 314,159,265,358,979,323,847

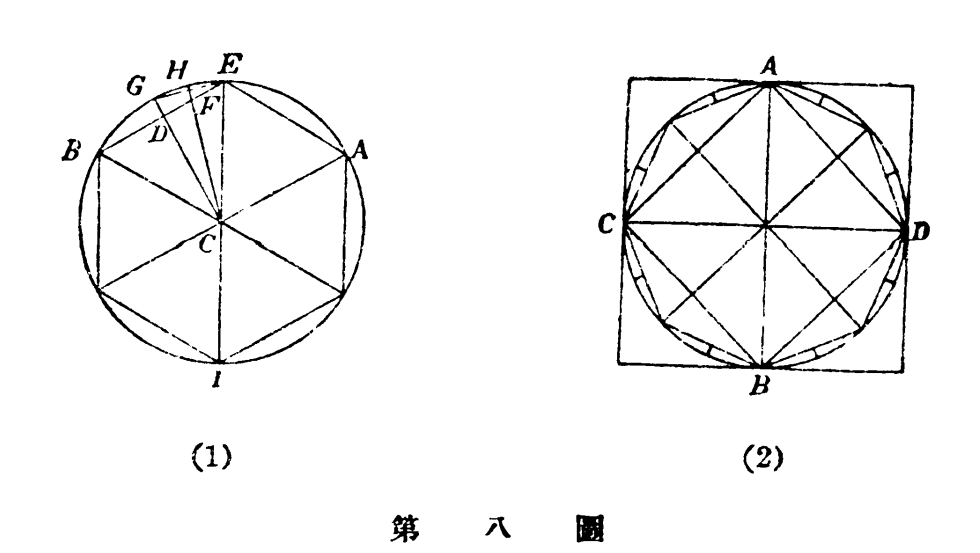
小周 314,159,265,358,979,323,846

約之,首取三字,爲 $\frac{314}{100}$, 則 $3\frac{14}{100}$, 再約之,得 $3\frac{1}{7}$,又朒如前.(2)

(2) 晚近西人之述亞奇默德圜書者,有; Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschiste der Mathematik, Vol. I. (Third Edition), Leipzig, 1907, pp. 300-303, 316, 319; Gino Loria, Le Scienze Esatte nell' Antica Grecia, in Modena, 1893, Libro II, pp. 126-132; Jame Gow, A Short History of Greek Mathematics, Cambridge, 1884, pp. 233-237; H. Weissen born, Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano, Berlin, 1894.

8. 清初中算家圓率值之計算

梅文鼎平三角舉要卷一補遺,"正弦爲八線之主"條,謂:"割圓之法,皆作句股於圜內,"并載二圖,第一圖即九章算經內劉徽割圜術,第二圖即元趙友欽革象新書內乾象周髀法.



(1) (2)

第八圖

梅文鼎幾何補編卷五稱:"徑七圍二十二者,乃祖冲之方法,……吾友錫山楊崑山(作枚),柘城,孔林宗(興泰)另有法."楊法立圓徑10000;積5238092564;孔法立圓徑10000,積5234987750;蓋楊作枚以$\pi=3.142855384<\frac{22}{7}$,孔興泰以$\pi=3.14159265$也.前此王錫闡曉庵新法(1651)取$\pi=3.1416$,梅文鼎方圓冪積(1710)取$\pi=3.14159265$.

李子金(字子金號隱山,柘城人)算法通義(1677)卷五,以圓內容四邊形起,計算各邊形面積,以證西法 $\pi=3.1416$ 之密.

其計算方法,與元趙友欽"乾象周髀法"相類.逐次所得句股及內容各邊形面積如下:

圓內4邊形面積	A_4	$=200.$
8段大句股面積	A_8	$=82.842712$
16段次句股面積	A_{16}	$=23.30389$
32段小句股面積	A_{32}	$=5.99775$
64段細句股面積	A_{64}	$=1.5103$
128段微句股面積	A_{128}	$=0.3784$
256段極微句股面積	A_{256}	$=0.09519$
$\pi r^2 (r=10)$		$=314.128742$
故	$\pi=$	$3.14128742.$

而圓內容 4 邊形面積	$=200.$
圓內容 8 邊形面積	$=282.842712,$
圓內容 16 邊形面積	$=306.146602,$
圓內容 32 邊形面積	$=312.144352,$
圓內容 64 邊形面積	$=313.654652,$
圓內容 128 邊形面積	$=314.033552,$

圓內容 256 邊形面積 =314.128742.

顧長發(字君源,江蘇人)著圜徑眞旨無卷數,以 $\pi=3.125$ 謂之智術,蓋襲程大位之說,惟以甄鸞,劉徽,祖冲之,邢雲路,湯若望諸人所定周徑,皆未密合,則失之矣.[3]

9. 清初西洋割圓法之輸入

雍正元年癸卯(1723)刻成數理精蘊,其下編卷十五,"面部五"割圓"屢求句股"謂:"古人用割圓之法,內弦外切,屢求句股,爲無數多邊形,以切近圓界,使弧線直線,漸合爲一,而圓周始得.……要之圜內六邊起算者,圓徑折半,即圓內六邊之一,乃用屢求句股之法,自六邊至十二邊."

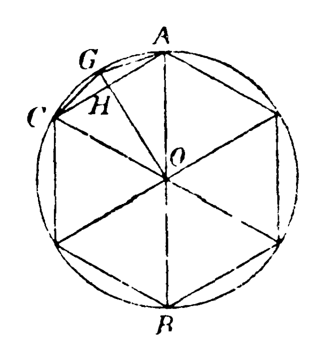
如圖 $$OG-\sqrt{\overline{OC}^2-\left(\frac{CA}{2}\right)^2}=GH$$

$\sqrt{\overline{GH}^2+\left(\frac{CA}{2}\right)^2}=CG$, 爲內容十二邊形之一邊,餘倣此.

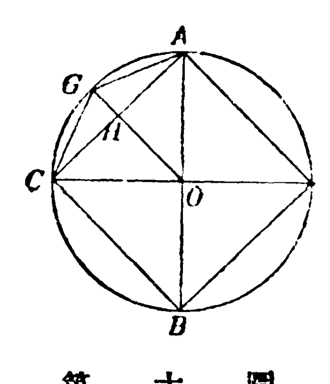
"圓內四邊起算者,則以圓徑爲內容正方之斜弦,自乘折半開方而得四邊之一,亦用屢求句股之法,自

(3) 見四庫全書總目卷一〇七,子部天文算法類存目.

四邊而八邊."如圖



第九圖



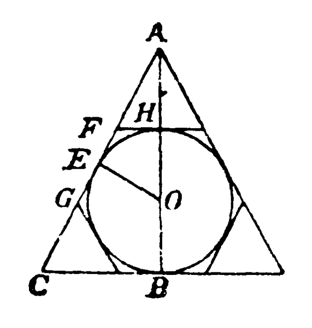
第十圖

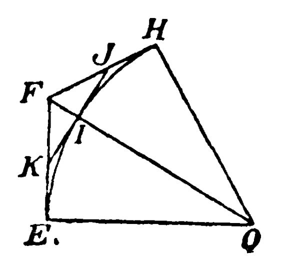
$\sqrt{2}\ AO = AC$ 爲內容四邊形之一邊.

$$OG - \sqrt{\overline{OC}^2 - \left(\frac{CA}{2}\right)^2} = GH$$

$\sqrt{\overline{GH}^2 + \left(\frac{CA}{2}\right)^2} = CG$ 爲內容八邊形之一邊.餘倣此.

"圜外六邊起算者,圜徑爲弦,半徑爲句,求得股,倍之卽圜外三邊之一,取其 $\frac{1}{3}$,卽圜外六邊之一.以六邊之一,折半之句爲一率,半徑之股爲二率,小同式形之句爲三率,推得四率爲小同式形之股,倍之卽十二邊之一."如圖



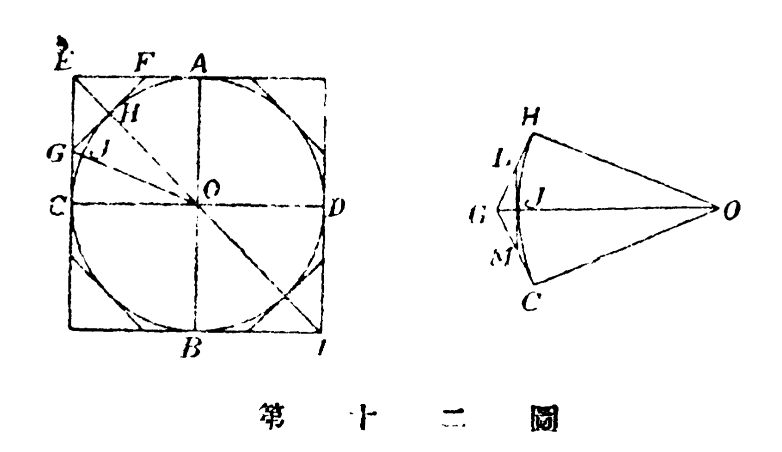


第十一圖

$\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{OE}^2}=\sqrt{\overline{HB}^2-\left(\frac{HB}{2}\right)^2}=AE$, $\frac{2}{3}AE=FG$ 爲圓外六邊形之一邊.

$\sqrt{\overline{EG}^2+\overline{OE}^2}-OE=FI$, $\frac{FH}{OH}=\frac{FI}{IJ}$, $2IJ=JK$ 爲圓外十二邊形之一邊,餘倣此.

“圓外四邊起算者,圓徑即四邊之一,圓徑自乘倍之開方,即圓外正方之斜弦,減去圓徑,即圓外兩角之餘,又即圓外八邊之一.以八邊之一,折半之句爲一率,半徑之股爲二率,小同式形之句爲三率,推得四率,爲小同式形之股,倍之,即十六邊之一.”如圖



第十二圖

$\sqrt{2}AB=EI$, $EI-AB=GF$ 爲圓外八邊形之一邊.

$\sqrt{\overline{CG}^2+\overline{OC}^2}-OH=GJ$, $\frac{GH}{OH}=\frac{GJ}{JL}$, $2JL=ML$ 爲圓外十六邊形之一邊,餘倣此.

如上四法累求至億萬邊,如後四表所得四值,平

均之,可得 $\pi=3.14159265358929323846$ 之值,此測量全義所謂今士之法,其差甚微,予得之數,積至二十一位也.然數理精蘊下編卷二十,祇應用 $\pi=3.14159265$ 入算.

第一表　圓內容六邊起算

邊數	每邊長
6	100,00000,00000.00000,00000,00000,00000,00000,00
12	51,76380,90205.04152,46977,97675,24809,66576,64
24	26,10523,84440.10318,30968,12455,79097,80203,87
48	13,08062,58460:28613,36306,31117,55035,08828,79
96	6,54381,65643.55228,41273,12288,24160,86784,33
192	3,27234,63252.97356,32859,28565,89918,98332,13
384	1,63622,79207.87425,85703,98146,58952,66790,64
768	81812,08052.46957,91892,48219,91003,6252[illegible],27
1536	40906,12582.32819,02288,26117,96858,5[illegible]00,39
3072	20453,07360.67660,90823,85922,29210,20790,29
6144	10226,53814.02739,50220,28598,95885,22439,17
12288	5113,26923.72483,46281,23299,03190,88476,79
24576	2556,63463.95130,94805,23449,01114,10631,76
49152	1278,31732.23676,62618,69476,46404,92099,97
98304	639,15866.15102,20711,60708,07126,38707,53
1,96608	319,57933.07959,09031,09381,54193,06538,00

3,93216	159,78966.54030,55288,69248,77937,23759,67
7,86432	79,89483.27021,64654,28066,68105,61111,48
15,72864	39,94741.63511,74529,25868,07068,11793,39
31,45728	19,97370.81755,90966,64059,25400,28679,64
62,91456	9,98685.40877,96728,39755,75740,61136,14
125,82912	4,99342.70438,98519,83312,36398,29963,55
251,65824	2,49671.35219,49279,37088,61769,88026,56
503,31648	1,24835.67609,74642,11723,32250,47094,18
1006,63296	62417.83804,87321,36259,06320,95878,43
2013,26592	31208.91902,43660,71929,20426,91184,02
4026,53184	15604.45951,21830,36439,49710,73209,51
8053,06368	7802.22975,60915,18279,15048,29151,42
16106,12736	3901.11487,80457,59146,99658,14870,15
32212,25472	1950.55743,90228.79574,52953,44068,74
64424,50944	975.27871,95114,39787,32936,44199,26
1,28849,01888	487.63935,97557,19893,67749,89099,05
2,57698,03776	243.81967,98778,19946,83874,94549,53
5,15396,07552	× 121.90983,99389,29973,41424,79879,09
=	628,31853,07179.58647,65801,34822,03550,10887,68

第二表 圜内容四邊起算

邊數	每邊長
4	141,42135,62373.09504,88016,88724,20969,80785,69
8	76,53668,64730.17954,34569,19968,06076,77335,23

16	39,01806,44032.25653,46965,69736,95404,41818,55
32	19,60342,80659.12120,39883,91127,77728,36917,22
64	9,81353,48654.83602,85099,15073,54192,18045,86
128	4,90824,57045.82457,60634,71621,06208,57541,22
256	2,45430,76571.43985,21588,17805,28322,70716,00
512	1,22717,69298.30895,07192,81109,89753,91502,87
1024	61359,13525.93481,84009,35613,56118,88503,18
2048	30679,60372.56953,12246,07554,48255,35780,54
4096	15339,80637.48540,90538,77216,80698,05365,29
8192	7669,90375.14279,11781,44963,40791,32883,11
16384	3834,95194.62140,66148,79839,14675,43703,33
32768	1917,47598.19195,46917,41044,43334,12743,17
65536	958,73799.20613,37690,98012,98668,34958,07
1,31072	479,36899.61683,64374,58375,65717,71348,27
2,62144	239,68449.81013,94128,43044,37461,75283,30
5,24288	119,84224.90528,48556,85760,04932,95546,88
10,48576	59,92112.45266,93215,00909,93872,60060,65
20,97152	29,96056.22633,80224,57708,71412,02539,66
41,94304	14,98028.11316,94314,42261,07534,74329,33
83,88608	7,49014.05658,47682,47806,37746,51550,77
167,77216	3,74507.02829,23906,89737,66870,66800,32
335,54432	1,81253.51414,61961,65598,14435,01082,24
671,08864	93626.75707,30981,85390,23592,46503,06
1342,17728	46813.37853,65491,05519,01343,10246,82

2684,35456		23406.68926,82745,54362,49361,90997,84
5368,70912		11703.34463,41372,77381,62019,12483,21
10737,41824		5851.67231,70686,38715,85676,64614,64
21474,83648		•2925.83615,85343,19361,05921,70853,94
42949,67296		1462.91807,92671,59680,92096,27745,29
85899,34592		731.45903,96335,79840,50314,01660,27
1,71798,69184		365.72951,98167,89920,25768,49928,86
3,43597,38368	×	182.86475,99083,94960,12960,68607,70
=		628,31853,07179.58647,68630,83106,75500,30233,60

第三表　圓外切六邊起算

邊數	每邊長
6	115,47005,38379.25152,90182,97561,00391,49112,95
12	53,58983,84862.24541,29451,07316,98825,52661,14
24	26,33049,95174.79170,69430,52914,81943,42071,84
48	13,10869,25630.47645,71290,87449,75988,55898,42
96	6,54732,20825.94517,28785,17897,78691,92473,10
192	3,27278,44270.62316,53306,82157,22593,98891,56
384	1,63628,26807.58775,27107,50124,14262,93055,02
768	81812,76501.57471,23405,28654,70206,37842,46
1536	40906,21138.43948,71770,73895,76250,93086,70
3072	20453,08430.18968,23098,79892,04940,73014,38
6144	10226,53947.71650,29406,07923,61708,24007,68
12288	5113,26940.43597,23011,62489,86396,73782,62

24576	2556,63446.04020,16640,52453,71933,91505,82
49152	1278,31732.49787,77840,10560,77401,04623,48
98304	639,15866.18566,10114,65335,64137,76784,84
1,96608	319,57933.08367,07706,38925,14975,02516,94
3,93216	159,78966.54081,54184,37010,37920,29433,22
7,86432	79,89483.27028,62133,58210,87258,60420,30
15,72864	39,94741.63512,41696,96569,02814,87045,58
31,45728	19,97370.81756,00927,25467,47497,76443,54
62,91456	9,98685.40877,97973,47381,60797,42752,98
125,82912	4,99342.70438,98675,46771,78780,94612,14
251,65824	2,49671.35219,49298,82521,01688,28848,62
503,31648	1,24835.67609,74614,54902,39881,37230,82
1006,63296	62417.83804,87321,66656,43570,33969,76
2013,26592	31208.91902,43660,75728,87238,87654,28
4026,53184	15604.45951,21830,36914,51801,15160,80
8053,06368	7802.22975,60915,18238,61923,23097,10
16106,12736	3901.11487,80357,59154,41714,48425,62
32212,25472	1950,55743,90228,79575,35326,34703,68
64424,50944	975.27871,95114,39787,44471,81163,20
1,28849,01888	487.63935,97557,19893,69336,98558,02
2,57698,03776	243.81967,98778,59946,84306,12776,06
5,15396,07552	× 121.90983,99389,29973,42107,76825,16
=	628,31853,07179.58647,69321,54601,77828,39608,32

第四表　圓外切四邊起算

邊數	每邊長
4	200,00000,00000.00000,00000,00000,00000,00000,00
8	82,84271,24746.19009,76033,77448,41939,61571,38
16	39,78247,34759.31601,38231,95245,28935,24571,04
32	19,69828,06714.32850,61543,95042,58265,48645,84
64	9,82536,99538.93450,82106,86642,54262,72341,58
128	4,90972,44217.85088,82091,59507,92181,74423,84
256	2,45449,24759.13255,04617,75106,46854,15928,90
512	1,22720,00315.24680,39285,88731,20262,16705,82
1024	61359,42402.84532,99741,47831,36424,34765,84
2048	30679,63982.17733,30569,85441,63670,08749,44
4096	15339,81088.68618,52103,46415,42325,58475,38
8192	7669,90431.54288,19766,91468,36815,44393,20
16384	3834,95201.67141,7770[illegible],[illegible]1555,12172,61821,10
32768	1917,47599.07320,60800,92296,09314,51461,06
65536	958,73799.31629,01924,52065,52620,76198,58
1,31072	479,36899.63060,59903,71697,52988,94629,44
2,62144	239,68449.81186,06069,57023,26958,93013,20
5,24288	119,84224.90550,00049,50001,14815,00233,66
10,48576	59,92112.45269,62151,58939,66012,80201,54
20,97152	29,96056.22634,13841,64962,30634,82482,20
41,94304	14,98028.11316,98516,55667,71553,86417,54

83,88608	7,49014.05658,48207,74482,17815,32914,52
167,77216	3,74507.02829,23972,55572,12912,74047,30
335,54432	1,87253.51414,61969,86327,44457,01335,74
671,08864	93626.75707,30982,87981,39478,58733,86
1342,17728	46813.37853,65491,18352,90645,55376,02
2684,35456	23406.68926,82745,55965,47936,05939,16
5368,70912	11703.34463,41372,77581,99294,69000,96
10737,41824	5851.67231,70686,38740,90313,17704,40
21474,83648	2925.83615,85343,19364,18989,81783,94
42949,67296	1462.91807,92671,59681,39836,98502,52
85899,34592	731.45903,96339,79840,60134,63671,66
1,71798,69184	365.72951,98167,89920,28844,33638,38
3,43597,38368	× 182.86475,99083,94960,14269,29544,50
=	628,31853 07179.58647,73127,17861,85894,13376,00

10. 錢塘,談泰,許桂林,李潢,駱騰鳳

錢塘(字岳原,號溉亭,嘉定人 1735–1790)著溉亭述古錄二卷,其卷二引 $\pi=3.14$, $\pi=\frac{355}{113}$,又稱:"予嘗測圓器,圍八百十分,徑二百五十八分."卽 $\pi=\frac{810}{258}$.阮元疇人傳(1799)於錢塘傳後,論云:"秦九韶以 $\sqrt{10}$ 爲周率,與塘所創率正同,江寧談泰嘗作一丈徑木板,以篾尺量其周,正得三丈一尺六寸奇,以爲錢塘周率爲至當不可易."許桂林(字同叔,號月南,海州人,1778–1821)

著宣西通今 $\pi=3.151807$.[4] 錢塘,談泰,許桂林所述,并無當於義.

李潢(字雲門,鍾祥人,?—1811)著九章算術細草圖說九卷.(1820刻)其註釋九章割圓恰到好處.蓋劉徽注九章割圓,以內容六等邊形起算.其法第一步以半徑爲弦,半六等邊爲句,求得股;以股減半徑爲小句,半六等邊爲小股,得小弦冪,開得小弦 0.517638 卽爲內容十二等邊形之一邊.第二步以半徑爲弦,半十二等邊爲句.求得股;惟爲簡便精密起見,不復以前得小弦自乘爲句冪,而以前得小弦冪之四分一爲句冪,開得股 $0.965925\frac{4}{5}$;又以股減半徑爲小句,半十二等邊爲小股,得小弦冪.同理以前得小弦冪之四分一爲小股冪,得新小弦冪,開得新小弦 0.261052 卽爲內容二十四等邊之一邊,餘倣此.此種解法,可不問每次"句.""小股"之值,僅認前次所得"小弦冪,"以爲第二次之"句冪,""小股冪,"事較切當.李潢卽本此義爲之圖解.李潢又以爲1536弧之一面爲0.004090612582

則 $\pi=3.1415904629$, 蓋據數理精蘊之說.

駱騰鳳(1770–1841)著藝游錄二卷,其卷二"割圓

(4) 張文虎:舒藝室雜著甲編,卷上,第二四引.

密率圖解"即本諸李潢,惟不明上述"不復以前得小弦自乘爲句冪,而以前得小弦冪之四分一爲句冪"之義,宜其所得有差,其過蓋不在李,而在駱矣.

11. 圓率解析法輸入後之圓率值計算

梅瑴成(1681–1763)於梅氏叢書輯要卷六十一,附錄一,赤水遺珍內載"求周徑密率捷法,[譯西士杜德美(Pierre Jartoux, 1670–1720. 11.30 1700年來華)法]."即下之三術:

$$\pi d = d\left\{3+\frac{3\cdot 1^2}{4\cdot \lfloor\!\underline{3}}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot \lfloor\!\underline{5}}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4^3\cdot \lfloor\!\underline{7}}+\cdots\cdots\right\}$$

或

$$\pi = 3\left\{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1^2.3^2}{\lfloor\!\underline{5}}+\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2}{\lfloor\!\underline{7}}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=3.1415926495\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(I)}$$

$$\sin a = a-\frac{a^3}{\lfloor\!\underline{3}\cdot r^2}+\frac{a^5}{\lfloor\!\underline{5}\cdot r^4}-\frac{a^7}{\lfloor\!\underline{7}\cdot r^6}$$

$$+\frac{a^9}{\lfloor\!\underline{9}\cdot r^8}-\cdots\cdots\cdots,\ \cdots\text{(II)}$$

$$\text{vers}\ a=\frac{a^2}{\lfloor\!\underline{2}\ r}-\frac{a^4}{\lfloor\!\underline{4}\cdot r^3}+\frac{a^6}{\lfloor\!\underline{6}\cdot r^5}-\frac{a^8}{\lfloor\!\underline{8}\cdot r^7}$$

$$+\frac{a^{10}}{\lfloor\!\underline{10}\cdot r^9}-\cdots\cdots\cdots,\ \cdots\text{(III)}$$

孔廣森(1752-1786)顨軒孔氏所著書五十五,少廣正負術外篇上,稱:"密弧求法,……宣城御史大夫梅(瑴成)公書中嘗載焉.至其弧背與弦矢互求,亦各有乘除之法,世則罕有傳者,廣森幸得聞之於靈臺郎陳君際新."蓋於(II)(III)式外復錄次之二術:

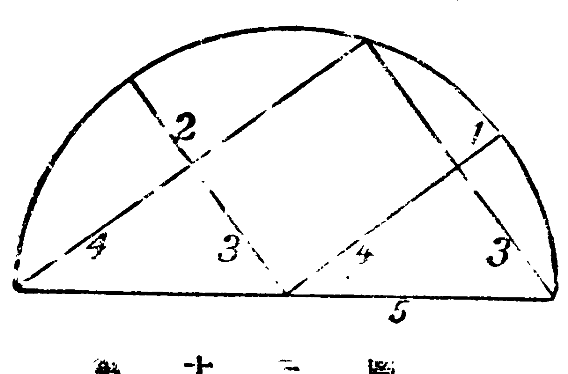
$$a=\sin a+\frac{1^2\cdot\sin^3 a}{3!\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\sin^5 a}{5!\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\sin^7 a}{7!\cdot r^6}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\sin^9 a}{9!\cdot r^8}+\cdots\cdots,\quad\cdots(\mathrm{VII})$$

$$a^2=r\left\{(2\operatorname{vers} a)+\frac{1^2\cdot(2\operatorname{vers} a)^2}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot(2\operatorname{vers} a)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot(2\operatorname{vers} a)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\},\quad\cdots(\mathrm{VIII})$$

如圖用徑一萬($D=2r=10000$)設算,試立直角於半圓之上,令成句六,股八,正句股形以句爲通弦者,其矢必有一,按(VIII)式,求得弧 $a_1=6435.008$,以股爲通弦者,其



第十三圖

矢必有二,按 (VIII) 式求得弧冪 $a_2^2=85987642.08515$, 開方得弧 $a_2=9272.952$, 併此兩弧而倍之,即

$$\pi=2(6435.008+9272.952)\div10000=3.141592$$

朱鴻(字雲路,號筠麓,或小梁,秀水人)先得張豸冠杜氏九術寫本,於嘉慶戊辰 (1808) 以示汪萊,又於己卯 (1819) 以示董祐誠.朱又以杜氏法推得四十位,徐有壬 (1800–1860) 採入務民義齋算學中,而二十五位以後,與眞數不合,即

$$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 2643,\ 86367\ 47227\ 9514.$$

項名達(號梅侶,仁和人,1789–1850)遺著象數一原七卷,其卷六因橢圜求周術變通而新定得"圜周求徑"術,如:

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2\cdot3}{2^2\cdot4^2}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}-\cdots\cdots$$

或
$$d=\frac{\pi d}{2}\left\{1-\frac{1}{2^2}-\frac{(2^2-1)}{2^2\cdot4^2}-\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}\right.$$
$$\left.-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}-\cdots\cdots\cdots\right\}$$

項氏自謂此級數,然級頗難,不足爲術也.

徐有壬(字君卿,烏程人)測圜密率卷一,第六術,謂.

$$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1^2}{3\cdot4}+\frac{1^2\cdot2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\cdots$$

蓋以 $a=\frac{\pi r}{3}$, 2 vers $a=r$, 代入(VIII)式得來.

顧觀光(號尚之,金山人,1799-1862)算賸初編,"用理分中末線求圓周法"(1853)算得 $\pi=3.14159\ 26535\ 8979_{2}$.

12. 清季西算之輸入與圓率值計算

李善蘭(字壬叔,號秋紉,海寧人,1809-1882)以咸豐壬子(1852)五月至滬,與西士偉烈亞力(Alexander Wylie)共譯幾何原本後九卷(1852-1856),棣麼甘(Augustus De Morgan, 1806-71)代數學十三卷(1859),羅密士(Elias Loomis, 1811-99)代微積拾級十八卷(1859),胡威立(Whewell)曲線說一卷(1866),其自著方圓闡幽,弧矢啓祕卽以尖錐求積術代積分術以求圓積.方圓闡幽所載求象限面積術,與代微積拾級卷十八,積分術相似,以今積分式表之如下:

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}.\,dx.$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot4}x^4-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^6-\cdots\cdots\right)dx.$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}-\cdots\cdots\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1^2}{\underline{|3}}-\frac{1^2\cdot3}{\underline{|5}}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5}{\underline{|7}}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{\underline{|9}}-\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1}{\underline{|3}}-\frac{(2^2-1)}{\underline{|5}}-\frac{(2^2-1)\ (4^2-1)}{\underline{|7}}$$

$$-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{\underline{|9}}-\cdots\cdots\cdots.(1)$$

夏鸞翔(字紫笙,錢塘人, 1823-1864) 著象數一原九卷(1862)亦用積分術得:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1^2}{5\underline{|2}}+\frac{1^2\cdot3^2}{7\underline{|4}}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{9\underline{|6}}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{(2^2-1)}{(2)(5)}+\frac{(2^2-1)\ (4^2-1)}{(2\cdot4)(5\cdot7)}\right.$$

$$\left.+\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{(2\cdot4\cdot6\cdot)(5\cdot7\cdot9)}+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(2)$$

又以 $a=\frac{\pi r}{2}$, $\sin a=r$, 代入杜氏(VII)式得

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1^2}{\underline{|3}}+\frac{1^2\cdot3^2}{\underline{|5}}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{\underline{|7}}+\cdots\cdots, \qquad (3)$$

夏鸞翔於致曲術以微積分術推得正矢求弧背術,即:

$$a=r\left\{\frac{2\ \mathrm{vers}\ a}{r}\right\}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\mathrm{vers}\ a}{2\lfloor\underline{3}\cdot r}+\frac{3^2\cdot\ \mathrm{vers}^2\ a}{2^2\lfloor\underline{5}\cdot r^2}+\frac{3^2\cdot 5^2\ \mathrm{vers}^3\ a}{2^3\lfloor\underline{7}\cdot r^3}+\cdots\cdots\right),$$

以 $a=\frac{\pi}{2}$, vers $a=1$, 代入得

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1^2}{2\lfloor\underline{3}}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot\lfloor\underline{5}}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^3\cdot\lfloor\underline{7}}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^4\cdot\lfloor\underline{9}}+\cdots\cdots, \quad (4)$$

若以 $a=\frac{\pi r}{4}$, $\sin a=\frac{r}{\sqrt{2}}$ 代入杜氏(VII)式,亦可得上式.

又以 $a=\frac{\pi}{4}$, $\tan a=1$ 代入戴煦外切密率卷三之"切線求本弧"術, $\pi a=\tan a-\frac{\tan^3 a}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5 a}{5\cdot r^4}-\frac{\tan^7 a}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots$,

得
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots, \quad (5)$$

以 $a=\frac{\pi}{6}$, $\tan a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 代入,得:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\frac{1}{9\cdot 3^4}-\cdots\cdots, \quad (6)$$

劉彝程著割圜密率一卷(1869),丁取忠欲刋入白芙堂叢書,以資罄未果,迨光緒戊戌(1898)善化劉鐸爲列入古今算學叢書中.其求平圓周有三術,以下二術,爲較簡易,蓋亦得力於微積分也.

$$\pi=3\left\{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4\cdot3}-\frac{1\cdot3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{1\cdot3^2\cdot5}{4^3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}-\frac{1\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{4^4\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)\right\} \quad (7)$$

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1\cdot3}{4(2)(5)}+\frac{1\cdot3^2\cdot5}{4^2(2\cdot4)(5\cdot7)}+\frac{1\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{4^3(2\cdot4\cdot6)(5\cdot7\cdot9)}+\cdots\cdots\right\} \quad (8)$$

左潛(字壬叟,湘陰人,? −1874)於割圜八線綴術補算,及綴術釋戴,綴術釋明外,又與曾紀鴻(1848–1877),黃宗憲共著圓率考眞圖解一卷(是書前後有同治十三年(1874),丁取忠,曾紀鴻序跋)以幾何法證得:

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

及 $$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{13}+\tan^{-1}\frac{1}{12}+\tan^{-1}\frac{5}{27}+\tan^{-1}\frac{1}{5}$$

由第一式求 $\pi, \frac{1}{\pi}$ 各至百位,即

$$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279$$
$$50288\ 41971\ 69399\ 37510\ 58209\ 74944$$
$$59230\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34825$$
$$34211\ 7067_{97},$$

$$\frac{1}{\pi}=0.31830\ 98861\ 83970\ 67153\ 77675\ 26745$$
$$02872\ 40689\ 19291\ 48091\ 28674\ 95334$$
$$68811\ 77935\ 95268\ 45307\ 01802\ 27605$$
$$53250\ 6171_{91}.$$

光緒丙子 (1876) 黃宗憲隨使至英,於博物院天學書中覓得圓率眞數一百五十八位,與曾左所推得百位者,校之,一一脗合.語見黃宗憲容圓七術卷尾"圓率眞數補."

同治十二年 (1873) 華蘅芳與英傅蘭雅,共譯英華里司代數術二十五卷,其卷二十五亦論圓率,幷由 $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 算得 $\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$.謂:"曾有算學士冋靈(Ludolph Van Ceulen,荷蘭人)者,用平圓內容外切之多等邊形,[即割圓法],費了極大工夫,算得此三十六位之數,其臨死之時,囑其家以此數刻於墓碑.……惟冋靈之後,

又有法蘭西人提拉尼(Fautet De Lagny, 1719)者,用簡便之法,推得一百二十八位周率之數,後有尤拉(Euler)考之,言提拉尼之法,只須八十小時工夫,已可算畢.又有人云,英國哇克斯福德大書院(Radcliffe Library, Oxford)內,有一書中,已記一百五十位周率,"其第273款又算得

$$\frac{2}{\pi}=0.63661977236,$$

$$\pi=3.141592636.$$

光緒三年(1877)華蘅芳與英傅蘭雅,共譯英海麻士三角數理十二卷,其第146及147款,謂:

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}.$$

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}.$$

第159款,謂:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot7}\cdots\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots.$$

(三)　圓率解析法

13. 杜德美法之輸入

距利瑪竇 (Matteo Ricci) 來華之期，恰及一稘，法人杜德美 (Pierre Jartoux; 1670–1720. 11. 30) 亦浮海東來，時爲十七世紀之末年 (1700). 是時國中適有測地之舉，遂於役其間. 杜德美又嘗與來布尼玆 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) 通訊.(5)

梅穀成 (1681–1763) 於梅氏叢書輯要卷六十一，附錄一，赤水遺珍內載"求周徑密率捷法，"注稱〔譯西士杜德美法〕.

$$\pi d=d\left\{3+\frac{3\cdot 1^2}{4\cdot \underline{|3}}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot \underline{|5}}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4^3\cdot \underline{|7}}+\cdots\cdots\right\}$$

或

$$\pi=3\left\{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{\underline{|3}}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2}{\underline{|5}}+\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{\underline{|7}}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=3.1415926495 \qquad \text{(I)}$$

(5)　參觀三上義夫，中日數學發達史第一四頁，即 Mikami, Y., The Development of Mathematics in China and Japan, Leipzig, 1913, p. 14. 及 Smith, D. E. and Mikami, Y., History of Japanese Mathematics, Chicago, 1914, pp. 154-155.

次載"求弦,矢捷法"即

設弧求正弦,

$$\sin a = a - \frac{a^3}{\underline{|3}\cdot r^2} + \frac{a^5}{\underline{|5}\cdot r^4} - \frac{a^7}{\underline{|7}\cdot r^6}$$

$$+ \frac{a^9}{\underline{|9}\cdot r^8} - \cdots\cdots, \qquad \text{(II)}$$

設弧求正矢,

$$\text{vers}\, a = \frac{a^2}{\underline{|2}\cdot r} - \frac{a^4}{\underline{|4}\cdot r^3} + \frac{a^6}{\underline{|6}\cdot r^5} - \frac{a^8}{\underline{|8}\cdot r^7}$$

$$+ \frac{a^{10}}{\underline{|10}\cdot r^9} - \cdots\cdots, \qquad \text{(III)}$$

割圜密率捷法四卷,爲明安圖(一作明圖,號靜庵,奉天正白旗生員)所作,剏始乾隆初年(1736-?),其子明新(字景臻),門人張肱(字良亭,寶應人,後官農部主政),陳際新(一作陳季新,號舜五,宛平人,後官靈臺郎),於明安圖卒後數年續成之,時乾隆三十九年(1774)也.書成後爲某氏(一作張敦仁)所祕,未及刻行[6].書雖未刻,世已有知者;孔廣森(1752-1786)曾聞其說於陳

(6) 見衡齋算學第六册,割圜連比例術圖解,序,(1819)及割圜密率捷法,道光己亥(1839)岑建功序.

際新(7).阮元(1764-1849)已藏有割圜捷法一帙,不知何人之書,故疇人傳(1799)未載(8).其九術寫本,世多傳記,而次序互有異同.朱鴻(字雲路,號筠麓或小梁,秀水人)先得張豸冠寫本,於嘉慶戊辰(1808)以示汪萊,汪萊始翻然改悔前此詆斥杜術之誤(9).朱鴻又於嘉慶己卯(1819)以九術示董祐誠,鍾祥,李潢(?-1811)舊藏有四卷本原書,道光辛巳(1821)即歸朱鴻,董祐誠(10).丁取忠(字果臣,號雲梧,長沙人)一日於友人家得一鈔

(7) 孔廣森少廣正負術外篇上,"割圜弧矢十條"稱:'……至其弧背與弦矢互求,亦各有乘除之法,世則罕有傳者,廣森幸得聞之於鑲藍郎陳君際新,……".

(8) 語見割圜密率捷法,道光二十年(1840)阮元序.

(9) 語見汪萊:衡齋算學第三册,第六册.及割圜密率捷法,羅士琳識.

汪萊:衡齋算學第六册稱:

"又論曰:西人杜德美有隨度求弦矢捷法,梅氏赤水遺珍載之未備.戊辰(1808)冬効力史館,協修朱君雲路出示所藏,乃覩德美全法,……"

* * *

"記曰,舊刻此册,誤詆德美之失.古愚張太守非之,蓋得明君圖所解者,太守祕其書不相示.予至都中,求之司博士廷棟,博士購之經歲,不能得,問之人云,明君所傳者,陳君季新,季新早卒無傳.然張太守已得之,惜予不獲見.爾因朱君出其全法,思悟及此,急改刊舊論,并記之,以誌吾過."

(10) 語見汪萊衡齋算學第六册,及董祐誠割圜連比例術圖解自序,後序.

本算書,首尾殘缺,不知何人撰,細抽其法,則弧度求弦矢,弦矢求弧度之全法,蓋杜德美之原術,第其文隱奧難解,而又無算例,果臣乃發憤爲算例凡若干言,書成名曰數學拾遺,時不知有明氏,董氏書(即明安圖割圜密率捷法,董祐誠割圜連比例術圖解)[11]也.又十餘年至道光已亥(1839)明氏書始刻行,上距艸始,已百年矣.其未刻行前,范景福,孔廣森,汪萊,董祐誠,焦循,安清翹諸家著說,已并受此書之影響矣.

割圜密率捷法卷一"步法"有圜徑求周等九術,陳際新稱:"內圜徑求周,弧背求弦,求矢三法,本泰西杜氏德美所著,"蓋以餘六術爲明安圖所補創也.而朱鴻,張豸冠,董祐誠,項名達,徐有壬,戴煦,丁取忠,夏鸞翔,復通稱杜氏九術.九術者:

(一)圜徑求周,

$$\pi d=d\left\{3+\frac{3\cdot1^2}{4\cdot\lfloor3}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2}{4^2\cdot\lfloor5}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2}{4^3\cdot\lfloor7}+\cdots\cdots\right\},$$

或

$$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{\lfloor3}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1^2\cdot3^2}{\lfloor5}+\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{\lfloor7}+\cdots\cdots,$$

---

(11) 語見丁取忠:數學拾遺,鄒汝勳咸豐元年(1851)序,丁取忠同治十三年(1874)自跋.

或 $$\pi d = 3d\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot(2n-1)!} \qquad \text{(I)}$$

(二)弧背求正弦,

$$\sin a = a - \frac{a^3}{3!\cdot r^2} + \frac{a^5}{5!\cdot r^4} - \frac{a^7}{7!\cdot r^6} + \frac{a^9}{9!\cdot r^8} - \cdots\cdots,$$

或 $$\sin a = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}\cdot \cdots\cdots \qquad \text{(II)}$$

(三)弧背求正矢,

$$\operatorname{vers} a = \frac{a^2}{2!\cdot r} - \frac{a^4}{4!\cdot r^3} + \frac{a^6}{6!\cdot r^5} - \frac{a^8}{8!\cdot r^7} + \frac{a^{10}}{10!\cdot r^9} - \cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers} a = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}(2n)!}\cdot \qquad \text{(III)}$$

(四)弧背求通弦,

$$c = 2a - \frac{(2a)^3}{4\,3!\cdot r^2} + \frac{(2a)^5}{4^2\cdot5!\cdot r^4} - \frac{(2a)^7}{4^3\cdot7!\cdot r^6}$$

$$+ \frac{(2a)^9}{4^4\cdot9!\cdot r^8} - \cdots\cdots,$$

或 $$c = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n-1}}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}(2n-1)!}\cdot \qquad \text{(IV)}$$

(五)弧背求矢,

$$\operatorname{vers} a=\frac{(2a)^2}{4\underline{|2}\cdot r}-\frac{(2a)^4}{4^2\cdot\underline{|4}\cdot r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\cdot\underline{|6}\cdot r^5}$$

$$-\frac{(2a)^8}{4^4\cdot\underline{|8}\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers} a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^n\cdot r^{2n-1}\cdot(2n)!} \qquad \text{(V)}$$

(六)通弦求弧背,

$$2a=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\underline{|5}\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\underline{|7}\cdot r^6}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot c^9}{4^4\cdot\underline{|9}\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

或 $$2a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}c^{2n-1}. \qquad \text{(VI)}$$

(七)正弦求弧背,

$$a=\sin a+\frac{1^2\cdot\sin^3 a}{\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\sin^5 a}{\underline{|5}\cdot r^4}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\sin^7 a}{\underline{|7}\cdot r^6}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\sin^9 a}{\underline{|9}\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

或 $$a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{r^{2(n+1)}\cdot(2n-1)!}\sin^{2n-1} a \qquad \text{(VII)}$$

此式乃由(VI)式,令$c=2\sin a$代得.

(八)正矢求弧背，

$$a^2=r\left\{(2\text{ vers }\alpha)+\frac{1^2(2\text{ vers }\alpha)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot(2\text{ vers }\alpha)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot(2\text{ vers }\alpha)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\},$$

或
$$a^2=2r\sum_1^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdot\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{r^{n-1}\cdot(2n)!}(2\text{ vers }\alpha)^n \quad \text{(VIII)}$$

(九)矢求弧背，

$$(2a)^2=r\left\{(8\text{ vers }\alpha)+\frac{1^2(8\text{ vers }\alpha)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot r}+\frac{1^2\cdot2^2(8\text{ vers }\alpha)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\, r^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2(8\text{ vers }\alpha)^4}{4^3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\, r^3}+\cdots\cdots\right\},$$

或
$$(2a)^2=2r\sum_1^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdot\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{4^{n-1}\cdot r^{n-1}(2n)!}(8\text{ vers }\alpha)^n$$

(IX)

此式由(VIII)式化得，極易看出.

以上所述九法，以(II)，(III)，(IV)，(V)，(VI)(VIII)六式爲基本，其餘則(I)式則由(VI)以 $2a=\frac{\pi d}{6}$，$c=\frac{d}{2}$，代入化得；(VII)式由(VI)以 $c=2\sin\alpha$ 代入化得；(IX)式由(VIII)式兩邊各增乘4化得.故割圜密率捷法卷三，卷四，"法解上，下，"僅解析此基本六法也.六法之中，

又以(II),(III),(VI),(VIII)四法,爲諸術所自出,故陳際新以告孔廣森,徐有壬測圜密率卷二,亦僅錄此四法也.其在西洋,則(II),(III)式爲古累固里(James Gregory)所發明(1667),(VI)式與牛頓(Isaac Newton)反正弦 $\sin^{-1}\frac{1}{a}$ 式(1676)相類.(VIII)式則尤拉(Euler)曾得之(1737),而公布此式則爲斯騰微(J. de Stainvilles, 1815)云.

其九術名目,次序亦頗有異同,如名目則:

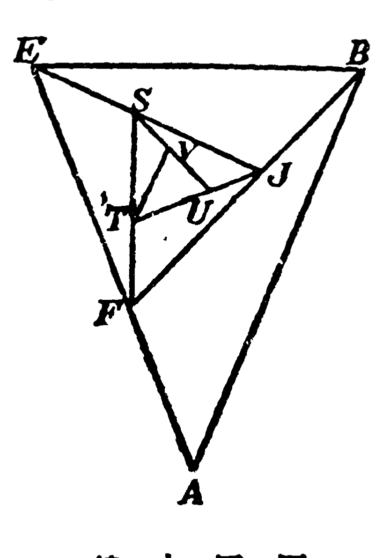
古法	割圜密率捷法本	張豸冠項名達引杜氏九術	丁取忠引杜氏術
弧背($2a$)	弧背($2a$)	通弧($2a$)	通弧($2a$)
弦(c)	通弦(c)	通弦(c)	通弦(c)
半弧背(a)	弧背(a)	弧背(a)	弧度(a)
半弧弦($\sin a$)	正弦($\sin a$)	正弦($\sin a$)	正弦($\sin a$)

次序則:

割圜密率捷法本	張豸冠寫本杜氏九術全本	項名達引杜氏九術	丁取忠數學拾遺引杜氏術
圜徑(d) 求周(πd) (I)	圜徑求周 (1)	圜徑求周 (9)	全徑求周 (9)
弧背(a) 求正弦($\sin a$) (II)	弧背求正弦 (4)	弧背求正弦 (3)	弧度求正弦 (1)
弧背(a) 求正矢(vers a) (III)	弧背求正矢 (5)	弧背求正矢 (4)	弧度求正矢 (2)
弧背($2a$) 求通弦(c) (IV)	通弧求通弦 (2)	通弧求通弦 (1)	通弧求通弦 (5)

弧背($2a$) 求矢(vers a)　(V)	通弧求矢　(3)	通弧求矢　(2)	通弧求矢　(6)
通弦(c) 求弧背($2a$)　(VI)	通弦求通弧　(6)	通弦求通弧　(5)	通弦求通弧　(7)
正弦(sin a) 求通弧(a)　(VII)	正弦求弧背　(8)	正弦求弧背　(7)	正弦求弧度　(3)
正矢(vers a) 求弧背(a)　(VIII)	正矢求弧背　(9)	正矢求弧背　(8)	正矢求弧度　(4)
矢(vers a) 求弧背($2a$)　(IX)	矢求通弧　(7)	矢求通弧　(6)	正矢求通弧　(8)

14. 明安圖之割圜密率捷法



第十四圖

明安圖以三十年之精思,始撰成割圜密率捷法,以解析九術,幷由連比例三角形入手.玆先說明連比例三角形,及其各率之性質.如圖 ABE, BEF, EFJ, FJS, JST, STU, TUV,……,因第二形之邊線,與前形之底線等,故各邊爲連比例,如

$$AB:BE=BE:EF=EF:FJ=FJ:JS=JS:ST=ST:TU=\cdots,$$

卽 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4=\phi_4:\phi_5=\phi_5:\phi_6=\cdots\cdots,$

而 $\phi_1, \phi_2, \phi_3,$……等稱爲一,二,三,……率.

且可知　$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3,$

$\phi_1:\phi_2=\phi_4:\phi_5;$

$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_5,$

$$\phi_1 : \phi_3 = \phi_5 : \phi_7;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

即
$$\phi_3 = \frac{\phi_2^{\ 2}}{\phi_1};$$

$$\phi_5 = \frac{\phi_2 \cdot \phi_4}{\phi_1}, \text{ 或 } \phi_5 = \frac{\phi_3^{\ 2}}{\phi_1};$$

$$\phi_7 = \frac{\phi_3 \cdot \phi_5}{\phi_1}, \text{ 或 } \phi_7 = \frac{\phi_3^{\ 3}}{\phi_1^{\ 2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\phi_{2n+1} = \frac{\phi_n \cdot \phi_{n+2}}{\phi_1}$$

且 ϕ_2, ϕ_3, ……等無論何數,凡與 ϕ_1 可成連比例者,幷合上定理.

故
$$\phi'_3 = \frac{\phi'_2 \cdot \phi'_2}{\phi_1},$$

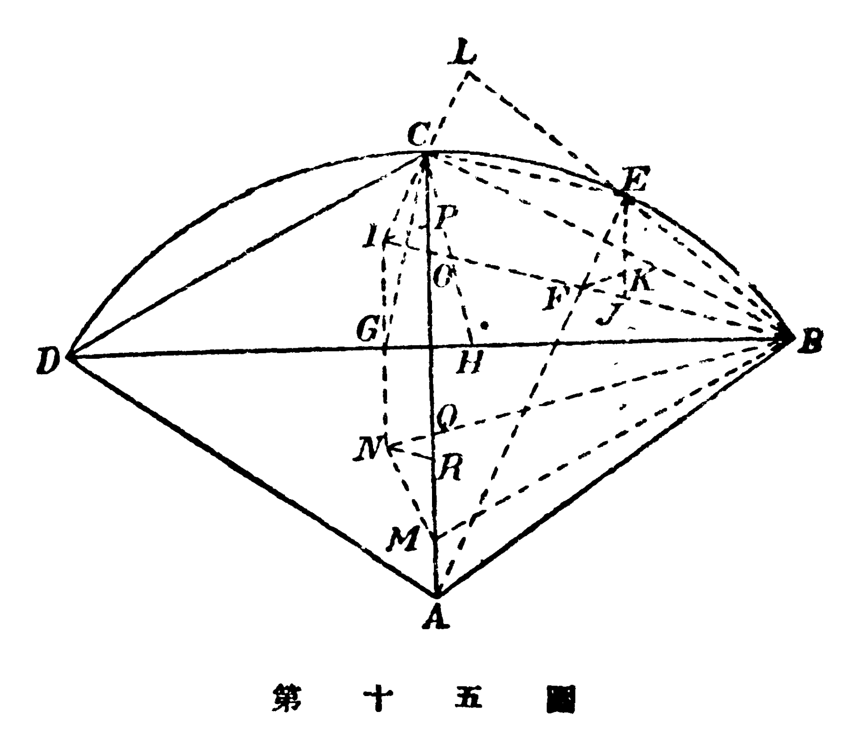
$$\phi'_5 = \frac{\phi'_3 \cdot \phi'_3}{\phi_1},$$

分弧通弦求全弧通弦,即弧背求通弦所由起.其法由一分弧通弦, ϕ_2, 以幾何法證得 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000, 10000 分弧之通弦,如下 I° 內 a_1°, a_2°, a_3°; b_1° b_2°; c°; d°; e°; f°; g°; h° 所示,若倍數擴充至無窮大,則全弧與無窮大倍數之一分弧通弦($n\phi_2$)合矣.[12]

I.° 分弧通弦率數，求全弧通弦率數法解.

$a_{1.}$° $\frac{1}{2}$分弧通弦率數，求全弧通弦率數第一法.

如圖 A 爲圓心，AB 爲半徑，平分 BD 弧於 C，BC 弧於 E. 聯 DA, DB, DC, BC, CE, BE, AC, AE 各線. 作 $BF=BE$. 則△s ABE、BEF 爲連比例△s，即 $AB:BE=BE:EF$，或 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$，而 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 爲一，二，三率.



第十五圖

又作 $BG=DH=BC$. 則有連比例△s BCG, CGH.

因 $$\angle BAE=\angle CBD,$$

故連比例△s ABE, BEF ∽ 連比例△s BCG, CGH.

(12) 以下見割圜密率捷法卷三，"法解上，" 第1-49頁，道光己亥(1839)孟秋，石梁岑氏校刊.

即 $$AB:EF=BC:GH,$$

故 $$BD=2BC-GH=2BC-\frac{BC\times EF}{AB}.$$

又作$BM=BC$. 則有連比例△ₛ ABC, BCM.

即 $$AB:BC=BC:CM,\ 或\ \phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3.$$

又作$EJ=EF, FK=FJ$,則有連比例△ₛ ABE, BEF, EFJ, FJK.

其中 $$\phi_1=AB,\ \phi_2=BE,\ \phi_3=EF,\ \phi_4=FJ,\ \phi_5=JK.$$

次引長BE, BF, 令 $EL=BE, FI=BF$, 則△ BEF ∽△ BLI. 以 BI 爲軸,展△ BIL 爲△ BIN. 因 ∠ₛ CBI, IBG 爲平分角,故 BC 與 BG 合. 以 BN 爲軸,展△ BGN 爲△BNM. 因 ∠GBN, NBM 爲平分角,故 BG 與 BM 合. 又作 $IP=IO$,則連比例△ₛ CIO, IOP= 連比例△ₛ EFJ, FJK. 因箏形(Kite) $ABEC, BLIN$ 爲相似,

故 $$AB:2BE(=BL=BE+EC)=2BE:LI+IN(=CI+IN+NM)=2BE:CM+PO(=CM+JK).$$

由前 $$AB:BC=BC:CM,$$

或 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3;$$

而 $$\phi_3=\frac{\overline{BC}^2}{AB}=\frac{\phi_2\cdot\phi_2}{\phi_1}.$$

又 $AB : BL = BL : (CI + IN + NM),$

或 $\phi_1 : \phi'_2 = \phi'_2 : \phi'_3;$

而 $$\phi'_3 = \frac{\overline{BL}^2}{AB} = \frac{\phi'_2 \cdot \phi'_2}{\phi_1}, \quad \frac{\phi'_3}{4} = CI = \frac{1}{4} \cdot \frac{\phi'_2 \cdot \phi'_2}{\phi_1}.$$

故 $$\phi_1 : \frac{\phi'_3}{4} = \frac{\phi'_3}{4} : \phi''_5,$$

或 $\phi_1 : \phi''_3 = \phi''_2 : \phi''_5;$

而 $$\phi''_5 = \frac{1}{16} \cdot \frac{\phi'_3 \cdot \phi'_3}{\phi_1} = \frac{\phi'_5}{16} = OP.$$

故 $$\phi_3 = \phi'_3 - \frac{\phi'_5}{16}.$$

同理 $\phi_1 : \phi_3 = \phi_3 : \phi_5$

即 $$\phi_1 : \left(\phi'_3 - \frac{\phi'_5}{16}\right) = \left(\phi'_3 - \frac{\phi'_5}{16}\right) : \phi_5.$$

$$\phi_5 = \phi'_5 - 2 \cdot \frac{\phi'_7}{16} + \frac{\phi'_9}{16 \cdot 16},$$

或 $$\phi_5 = \phi'_5 - 2 \cdot \frac{\phi'_7}{4^2} + \frac{\phi'_9}{4^4};$$

$$\frac{\phi_5}{16} = \frac{\phi'_5}{16} - 2 \cdot \frac{\phi_7}{16 \cdot 16} + \frac{\phi'_9}{16 \cdot 16 \cdot 16},$$

或 $$\frac{\phi_5}{4^2} = \frac{\phi'_5}{4^2} - 2 \cdot \frac{\phi'_7}{4^4} + \frac{\phi'_9}{4^6}.$$

又 $$\phi_1 : \phi_3 = \phi_5 : \phi_7$$

即 $$\phi_1 : \phi_3 = \frac{\phi_5}{16} : \frac{\phi_7}{16}.$$

$$\phi_1 : \left(\phi'_3 - \frac{\phi'_5}{16}\right) = \left(\frac{\phi'_5}{16} - 2\cdot\frac{\phi'_7}{16\cdot16} + \frac{\phi'_9}{16\cdot16\cdot16}\right) : \frac{\phi_7}{16}$$

$$\frac{\phi_7}{16} = \frac{\phi'_7}{16} - 3\frac{\phi'_9}{16\cdot16} + 3\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16} - \frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16},$$

$$\frac{\phi_7}{16\cdot16} = \frac{\phi'_7}{16\cdot16} - 3\frac{\phi'_9}{16\cdot16\cdot16} + 3\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16} - \frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}.$$

又 $$\phi_1 : \phi_3 = \phi_7 : \phi_9,$$

即 $$\phi_1 : \phi_3 = \frac{\phi_7}{16\cdot16} : \frac{\phi_9}{16\cdot16},$$

$$\phi_1 : \left(\phi'_3 - \frac{\phi'_5}{16}\right) = \left(\frac{\phi'_7}{16\cdot16} - 3\frac{\phi'_9}{16\cdot16\cdot16} + 3\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16} - \frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}\right) : \frac{\phi_9}{16\cdot16}.$$

$$\frac{\phi_9}{16\cdot16\cdot16} = \frac{\phi'_9}{16\cdot16\cdot16} - 4\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16} + 6\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16} - 4\frac{\phi'_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$

(以下略去)

又 $\phi_1:\phi_3=\phi_9:\phi_{11}$

即 $\phi_1:\phi_3=\frac{\phi_9}{16\cdot16\cdot16}:\frac{\phi_{11}}{16\cdot16\cdot16}$

$$\phi_1:\left(\phi'_3-\frac{\phi'_5}{16}\right)=\left(\frac{\phi'_9}{16\cdot16\cdot16}-4\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16}\right.$$

$$\left.+6\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}-4\frac{\phi'_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}\right)$$

$$:\frac{\phi_{11}}{16\cdot16\cdot16}.$$

$$\frac{\phi_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16}=\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16}-5\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$

$$+10\frac{\phi'_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$ (以下略去)

同理

$$\frac{\phi_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}=\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}-6\frac{\phi'_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$

(以下略去)

$$\frac{\phi_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}=\frac{\phi'_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$ (以下略去)

由上各式可以求得ϕ_3, ϕ_5, ϕ_7,……爲函數之ϕ'_3數值,蓋

$$\phi_3=\phi'_3-\frac{\phi'_5}{16}$$

$$\frac{\phi_5}{16}=\frac{\phi'_5}{16}-2\frac{\phi'_7}{16^2}+\frac{\phi'_9}{16^3}$$

$$2\frac{\phi_7}{16^2}=2\frac{\phi'_7}{16^2}-6\frac{\phi'_9}{16^3}+6\frac{\phi'_{11}}{16^4}-2\frac{\phi'_{13}}{16^5}$$

$$5\frac{\phi_9}{16^3}=5\frac{\phi'_9}{16^3}-20\frac{\phi'_{11}}{16^4}+30\frac{\phi'_{13}}{16^5}-20\frac{\phi'_{15}}{16^6}$$

$$14\frac{\phi_{11}}{16^4}=14\frac{\phi'_{11}}{16^4}-70\frac{\phi'_{13}}{16^5}+140\frac{\phi'_{15}}{16^6}$$

$$42\frac{\phi_{13}}{16^5}=42\frac{\phi'_{13}}{16^5}-252\frac{\phi'_{15}}{16^6}$$

$$132\frac{\phi_{15}}{16^6}=132\frac{\phi'_{15}}{16^6}$$

加之得 $\phi_3+\frac{\phi_5}{16}+2\frac{\phi_7}{16^2}+5\frac{\phi_9}{16^3}+14\frac{\phi_{11}}{16^4}+42\frac{\phi_{13}}{16^5}$

$$+132\frac{\phi_{15}}{16^6}=\phi'_3.$$

而 $$\frac{\phi'_3}{4}=\frac{\phi_3}{4}+\frac{\phi_5}{4\cdot16}+2\frac{\phi_7}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_9}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{11}}{4\cdot16^4}$$

$$+42\frac{\phi_{13}}{4\cdot16^5}+132\frac{\phi_{15}}{4\cdot16^6}.$$

又 $$EF=\frac{\phi'_3}{4},\ \frac{BC\times EF}{AB}=\frac{\phi_2}{\phi_1}\left(\frac{\phi'_3}{4}\right)=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}$$

$$+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

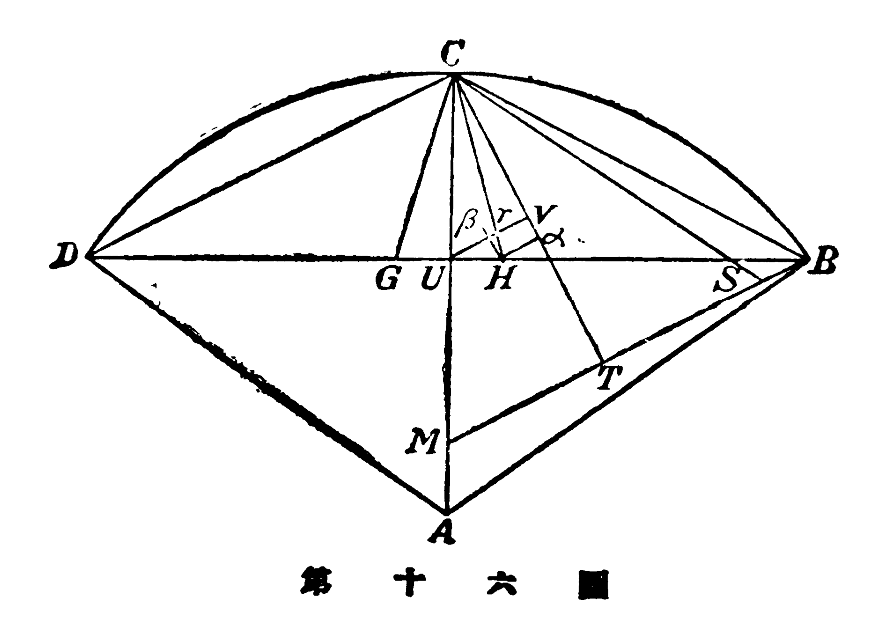
前證得 $BD=2BC-\frac{BC\times EF}{AB}$,代入得

$$BD=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

而 $\phi_1=AB=r$; $\phi_2, \phi_4, \phi_6, \cdots\cdots$ 爲分弧通弦率,BD 爲二分全弧通弦率;此言以 BC 爲某弧之通弦,因而求得 BD 爲二倍弧之通弦也.

a_2°. $\frac{1}{2}$ 分弧通弦率數,求全弧通弦率數第二法.



第十六圖

按前圖於$\triangle BCM$內作$BM=BC$, $CS=CN$, $ST=MT$; 聯各線,則有連比例$\triangle$, ABC, BCM, CMS,卽$AB:BC=BC:CM=CM:MS$, 卽 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4$.自$U$, H作MB之平行線$U\gamma V$, Ha, 則$MT=\frac{1}{2}\phi_4$, $U\gamma V=\frac{1}{4}\phi_4$.

因 $\angle UCa=\angle CBU=\angle GCH$, 則$\triangle GCU=\triangle HCa$而$Ha=UH=GU$.

自H作$H\beta\perp U\gamma V$.因$MB\parallel DC$, $U\gamma V\parallel MB$, 卽$U\gamma V\parallel DC$.而$\triangle$, DCH, $U\gamma H$爲相似,故$UH=U\gamma$.

故得連比例$\triangle$, BCG, CGH, $2UHr$.

則
$$AB:BC=BC:CM$$
卽
$$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$$
而
$$CU=\frac{1}{2}\phi_3.$$
又
$$BC:CU=CU:U\gamma V$$
卽
$$\phi_2:\frac{1}{2}\phi_3=\frac{1}{2}\phi_3:\frac{1}{4}\phi_4,$$
則
$$\frac{1}{4}\phi_4=\frac{\left(\frac{1}{2}\phi_3\right)^2}{\phi_2},$$
而
$$U\gamma V=\frac{1}{4}\phi_4.$$
又
$$BC:CG=CG:GH$$

即 $$\phi_2 : \frac{1}{2}\phi'_3 = \frac{1}{2}\phi'_3 : \frac{1}{4}\phi'_4,$$

則 $$\frac{1}{4}\phi'_4 = \frac{\left(\frac{1}{2}\phi'_3\right)^2}{\phi_2},$$

而 $$UH = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi'_4.$$

又 $$BC : UH = UH : \beta\gamma$$

即 $$\phi_2 : \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi'_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi'_4 : \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\phi'_6,$$

則 $$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\phi'_6 = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi'_4\right)^2}{\phi_2},$$

而 $$\beta\gamma = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\phi'_6.$$

如圖 $$UH + Ha - \beta\gamma = U\gamma V$$

即 $$\frac{1}{4}\phi'_4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\phi'_6 = \frac{1}{4}\phi_4.$$

同理 $$\phi_2 : \frac{\phi_4}{4} = \frac{\phi_4}{4} : \frac{\phi_6}{16}$$

即 $$\phi_2 : \left(\frac{\phi_4}{4} - \frac{\phi'_6}{4\cdot16}\right) = \left(\frac{\phi'_4}{4} - \frac{\phi'_6}{4\cdot16}\right) : \frac{\phi_6}{16}$$

$$\frac{\phi_6}{16}=\frac{\phi'_6}{16}-2\frac{\phi'_8}{16^2}+\frac{\phi'_{10}}{16^3}.$$

$$\frac{\phi_6}{4\cdot 16}=\frac{\phi'_6}{4\cdot 16}-2\frac{\phi'_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}$$

又 $$\phi_2:\frac{\phi_4}{4}=\frac{\phi_6}{4\cdot 16}:\frac{\phi_8}{16^2}$$

卽 $$\phi_2:\left(\frac{\phi'_4}{4}-\frac{\phi'_6}{4\cdot 16}\right)=\left(\frac{\phi'_6}{4\cdot 16}-2\frac{\phi'_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}\right):\frac{\phi_3}{16^2}$$

$$\frac{\phi_8}{16^2}=\frac{\phi'_8}{16^2}-3\frac{\phi'_{10}}{16^3}+3\frac{\phi'_{12}}{16^4}-\frac{\phi'_{14}}{16^5},$$

$$\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}=\frac{\phi'_8}{4\cdot 16^2}-3\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}+3\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}-\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}.$$

又 $$\phi_2:\frac{\phi_4}{4}=\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}:\frac{\phi_{10}}{16^3}$$

卽 $$\phi_2:\left(\frac{\phi'_4}{4}-\frac{\phi'_6}{4\cdot 16}\right)=\left(\frac{\phi'_8}{4\cdot 16^2}-3\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}+3\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}-\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}\right):\frac{\phi_{10}}{16^3}.$$

$$\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}=\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}-4\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}+6\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}-4\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}.$$ （以下略去）

又 $$\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}=\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}-5\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}+10\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$

（以下略去）

$$\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}=\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}-6\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$（以下略去）

$$\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}=\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$（以下略去）

由上各式可以求得$\phi_4, \phi_6, \phi_8,$……爲函數之ϕ'_4數值，蓋

$$\frac{\phi_4}{4}=\frac{\phi'_4}{4}-\frac{\phi'_6}{4\cdot 16}$$

$$\frac{\phi_6}{4\cdot 16}=\frac{\phi'_6}{4\cdot 16}-2\frac{\phi'_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}$$

$$2\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}=2\frac{\phi'_8}{4\cdot 16^2}-6\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}+6\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}-2\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$5\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}=5\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}-20\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}+30\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}-20\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$

$$14\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}=14\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}-70\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}+140\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$

$$42\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}=42\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}-252\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$

$$132\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}=132\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}$$

加之得 $\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$

$$+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}=\frac{\phi'_4}{4}.$$

而 $UH=\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi'_4}{4}.$

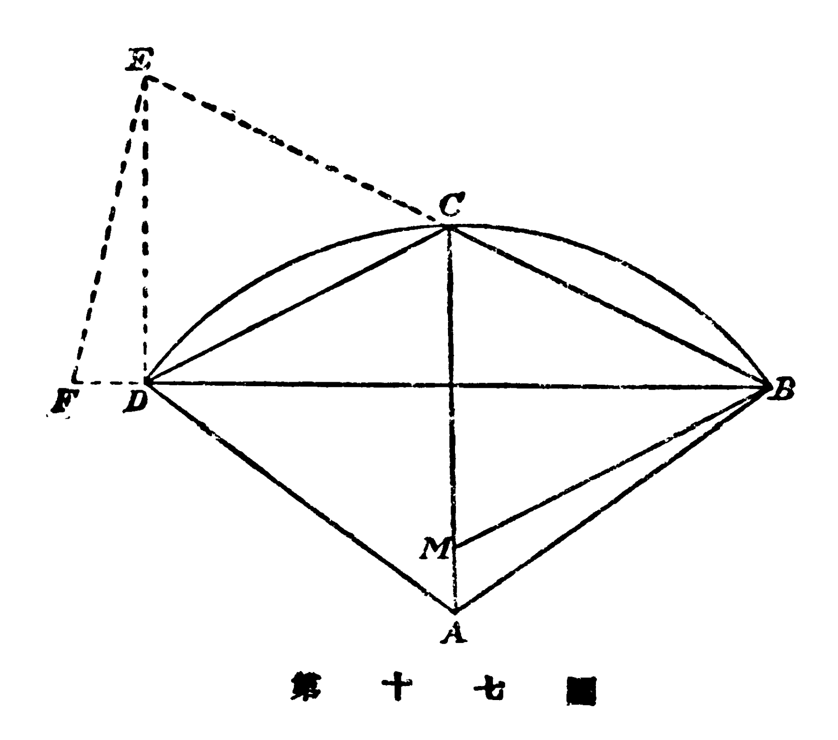
因得 $BD=2BC-GH=2BC-2UH.$

$$=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^8}$$

$$-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

與第一法相同.

a^0_8. $\frac{1}{2}$分弧通弦率數.求全弧通弦率數第三法.



第十七圖

按前圖引長 BC 交直垂線 DE 於 E. 又作 $BF=BE$

則 $$DE=CM=\phi_3=a,$$

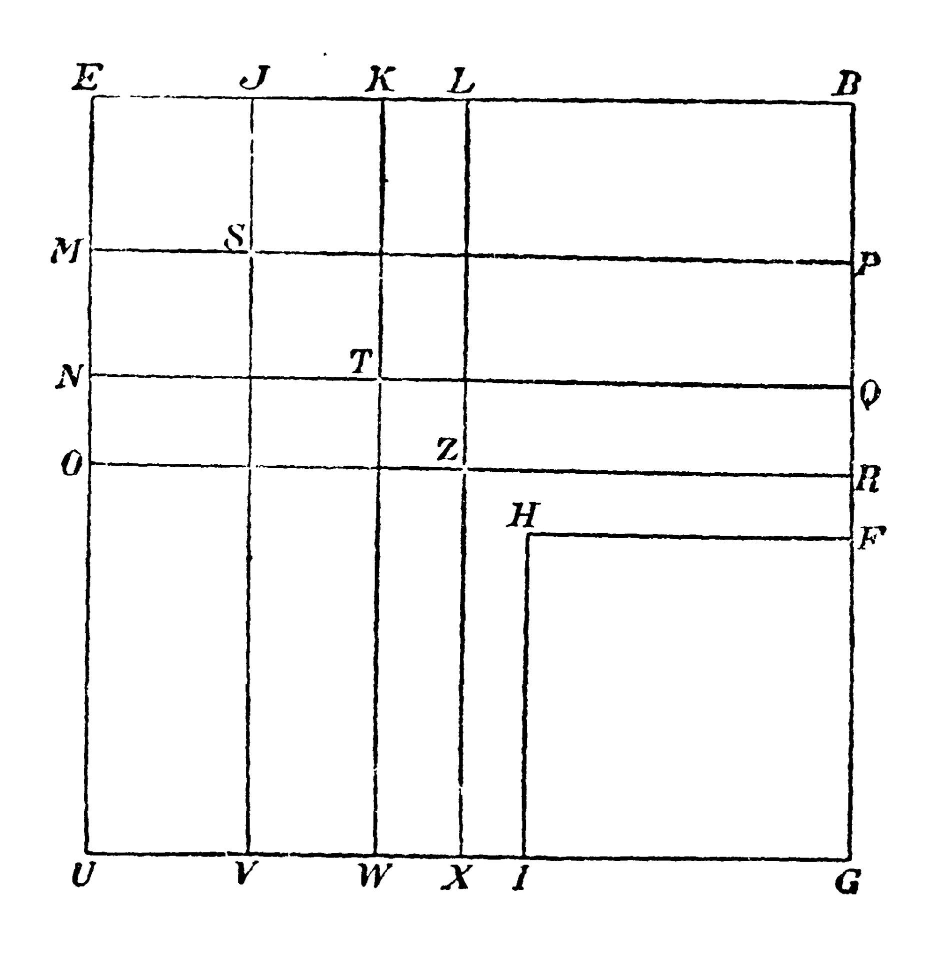
$$BD=b,$$

$$BE=2\phi_2=c$$

$$a^2+b^2=c^2$$

次如又圖,作 $\square BEUG=c^2$, $\square FHIG=b^2$.

則 磬折形 $BHUE=(c+b)(c-b)=a^2$.



第十八圖

按 Pythagoras 定理,$(c+b)(c-b)=a^2$, $\frac{a^2}{c+b}=c-b$,分數 $\frac{a^2}{c+b}$ 之分母分子若爲已知,則可直接求得 $c-b$. 但僅有分子 $a^2=\phi_3{}^2$ 爲已知;而分母 $c+b$ 中僅有 $c=2\phi_2$ 爲已知,如令 $b=c$ 代入之,則分母爲 $2c=4\phi_2$, 可以先求得 $c-b$ 較小之數,但實際 $c>b$, 故 $\frac{a^2}{2c}<c-b$, 今假令所得較小之數爲 BP.

因上述 $\frac{\phi_3\cdot\phi_3}{4\phi_2}=\frac{\phi_4}{4}$ 之關係,即得 $\frac{(c+b)(c-b)}{2c}=BP$. 此爲 $\frac{a^2}{c+b}$ 之初商.

如圖　磬折形 $BHUE=\square BEMP+\square JEUV$.

$=$磬折形 $BSUE+\square ES$

則　$\square ES=$磬折形 $PHVS$, 而 $ES=\left(\frac{\phi_4{}^2}{4}\right)^2$

又因　$\frac{\left(\frac{\phi_4}{4}\right)^2}{4\phi_2}=\frac{\phi_6}{4\cdot 16}$ 之關係,

即得　$\frac{\text{磬折形 } PHVS}{2c}=PQ$. 此爲 $\frac{a^2}{c+b}$ 之次商.

又如圖　磬折形 $PHVS=\square PN+\square KV$.

$=$磬折形 $QSVT+$磬折形 $JTNS$.

即　磬折形 $QHWT+$磬折形 $QSVT=$磬折形 $QSVT$

$+$磬折形 $JTNS$.

$\therefore$ 磬折形 $JTNS=$ 磬折形 $QHWT$.

而 磬折形 $JTNS$ 中, $JS=\dfrac{\phi_4}{4}$, $PQ=\dfrac{\phi_6}{4\cdot 16}$.

$\therefore$ 磬折形 $JTNS=$ 磬折形 $QHWT$

$$=\left(2\cdot\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot 16}\right)\cdot\frac{\phi_6}{4\cdot 16}.$$

故 $$\frac{\text{磬折形 } QHWT}{4\phi_2}=2\cdot\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}=QR \quad (\text{三商})$$

同理,磬折形 $KZOT=$ 磬折形 $RHXZ$

$$=\left(2\cdot\frac{\phi_4}{4}+2\frac{\phi_6}{4\cdot 16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}\right)\left(2\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}\right).$$

故 $$\frac{\text{磬折形 } RHXZ}{4\phi_2}=4\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6} \text{ 四商}$$

同理,

$$\text{五商}=\Big\{\Big[2\Big(\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot 16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}\Big)+\Big(4\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}\Big)\Big]\Big[4\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}$$

$$+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\Big]\Big\}\div4\phi_2$$

$$=8\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+20\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+40\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$（以下略去）

六商 $=16\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+56\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$（以下略去）

七商 $=32\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$（以下略去）

故
$$c-b=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+\left(2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}\right)+\left(4\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}\right.$$
$$\left.+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)$$
$$+\left(8\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+20\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+40\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)$$
$$+\left(16\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+56\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)+\left(32\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)$$
$$=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$
$$+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

因 $c=2\phi_2$

故 $b=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$

$$-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\cdot$$

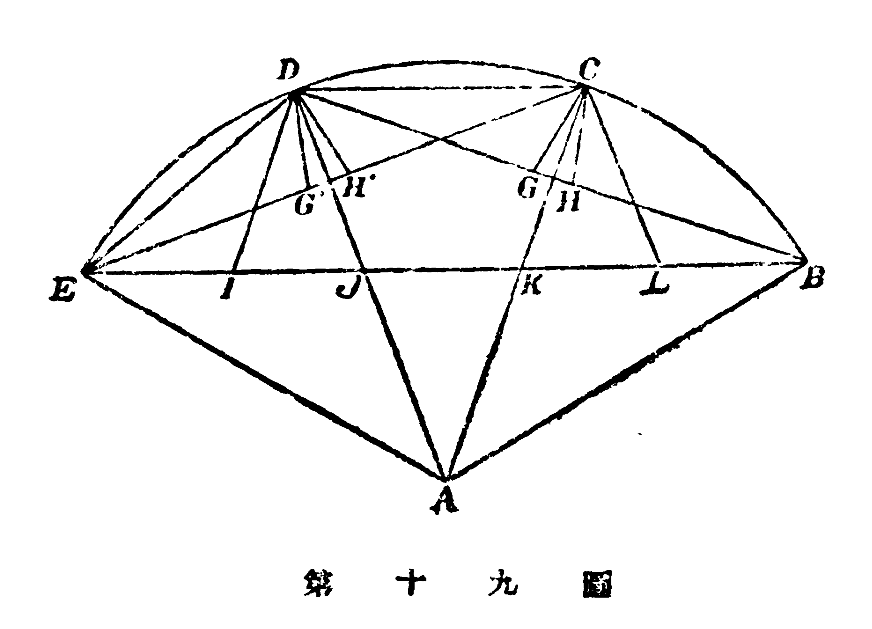
其結果與前二法同.

b°_1. $\frac{1}{3}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數第一法.

如圖以A爲圓心,AB爲半徑,$BC=CD=DE$.

聯EC, BD, BE;而$BD=EC$.由前法知

$$BD=2\,BC-GH,\ EC=2\,ED-G'H'.$$



第十九圖

次作$BI=EL=BD$又作$DI=DJ=CK=CL$.

故連比例$\triangle_s$ BDI, DIJ 或 $\triangle_s$ ECL, CLK $\backsim$連比例

$\triangle_s$ BCG, CGH EDH 或 $\triangle_s EDH'$, $DG'H'$.

即 $$AB:BC=CG:GH$$

或 $$\phi_1:\phi_2=\phi_3:\phi_4$$

而 $BC:GH=BD:IJ.\quad IJ=\dfrac{BD\times GH}{BC}.$

$$BE=2\,BD-IL=2\,BD-(DC+IJ)=2\,BD-BC-IJ.$$

由前題知 $$BD=2\,\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$
$$-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$
$$-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\cdot$$

又知 $$GH=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$
$$+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$
$$+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\cdot$$

$$\frac{BD\times GH}{BC}=2\frac{\phi_4}{4}-2\frac{\phi_6}{4\cdot16}-4\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-10\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}.$$
$$-28\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-84\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$
$$-264\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\cdot$$

則 $$BE=2\,BD-BC-IJ$$

$$=4\phi_2-2\frac{\phi_4}{4}-2\frac{\phi_6}{4\cdot16}-4\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-10\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$-28\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-84\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-264\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\cdot$$

$$-\phi_2$$

$$+)\qquad -2\frac{\phi_4}{4}+2\frac{\phi_6}{4\cdot16}+4\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+10\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$+28\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+84\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+264\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\cdot$$

$\therefore\quad BE=3\phi_2-4\frac{\phi_4}{4}$ 爲所求三分全弧通弦率數.

$b^\circ 2.$ $\frac{1}{3}$ 分弧通弦率數,求全弧通弦率數第二法.

如圖　　$AB:BC=CK:KL$

即此　　$\phi_1:\phi_2=\phi_3:\phi_4$

$BE=3\,BC-KL=3\,\phi_2-\phi_4$. 此法甚易,然與前法不能相通,故置爲又法.

(按此卽數理精蘊,1723,卷十六,"新增按分作相連比例四率法"甲之法).

$c^\circ.$ $\frac{1}{4}$ 分弧通弦率數,求全弧通弦率數.

如圖以 A 爲圓心, AB 爲半徑, $BC, CD,\cdots\cdots$ 爲 $\frac{1}{4}$ 弧; BC,

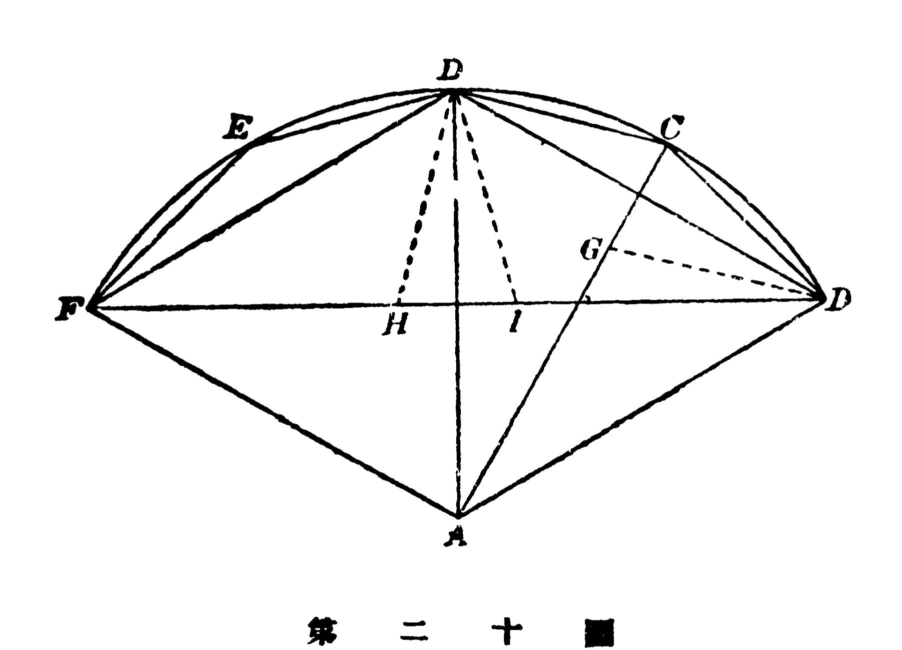
CD,…… 爲 $\frac{1}{4}$ 弧通弦; BD, DF,…… 爲 $\frac{1}{2}$ 弧通弦. 求 BF 全弧通弦.

作 $BH=BD$, $FI=FD$; $BG=BC$.

則連比例△, BDH, DHI 或 FDI, DHI ∽ 連比例△, ABC, BCG.

即 $$AB:BC=BC:CG$$

或 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3;$$



第二十圖

而 $$AB:CG=BD:HI,\qquad HI=\frac{BD\times CG}{AB}.$$

$$BF=2\,BD-HI=2\,BD-\frac{BD\times CG}{AB}.$$

因 $\frac{BD\times CG}{AB}=\frac{\phi_3}{\phi_1}BD$

$$=8\frac{\phi_4}{4}-16\frac{\phi_6}{4\cdot16}-16\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-32\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-80\frac{\phi_{12}}{2\cdot16^4}-224\frac{\phi_{14}}{4\cdot11^5}-672\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

$BF=2BD-HI$

$$=4\phi_2-2\frac{\phi_4}{4}-2\frac{\phi_6}{4\cdot16}-4\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-10\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-28\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-84\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-264\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

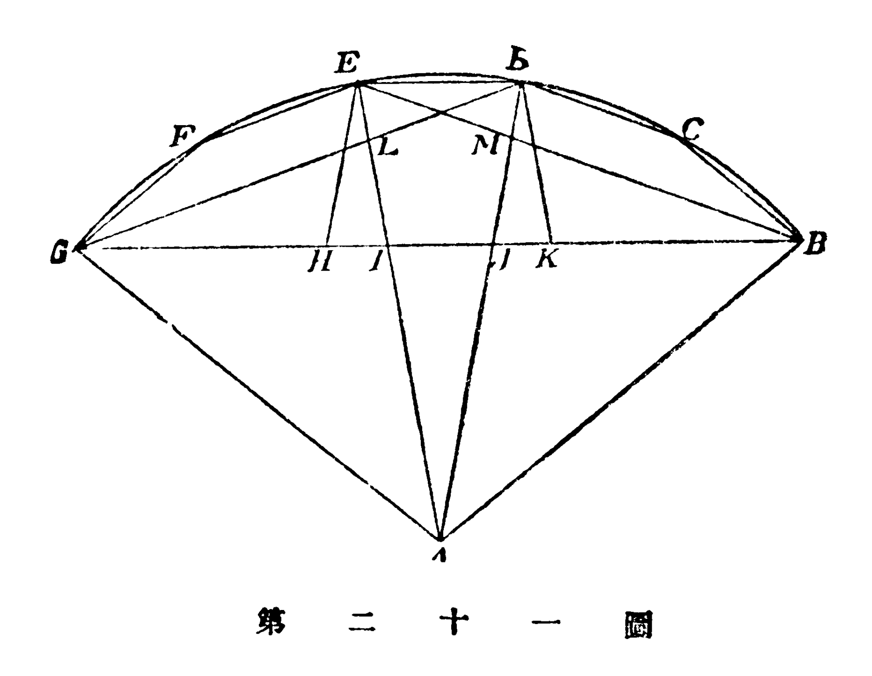
$$+)\quad -8\frac{\phi_4}{4}+16\frac{\phi_6}{4\cdot16}+16\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+32\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+80\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+224\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+672\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

$$BF=4\phi_2-10\frac{\phi_4}{4}+14\frac{\phi_6}{4\cdot16}+12\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+22\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+52\frac{\phi_{12}}{4\cdot17^4}+140\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+408\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

爲所求四分全弧通弦率數.

d. $\frac{1}{5}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數

如圖以 A 爲圓心, AB 爲半徑, $BC, CD,$……爲 $\frac{1}{5}$ 弧, $BC, CD,$ …… 爲 $\frac{1}{5}$ 弧通弦. BE, GD 爲 $\frac{1}{3}$ 弧通弦.作 $BH=BE, GK=GD$; 聯 EH, DK. 此二線各與 DA, EA 平行.



第二十一圖

則連比例$\triangle$, BEH, EHI 或 GDK, DKJ $\backsim$ 連比例$\triangle$ AED, EDL.

即 $AB:BC=ED:EL$, 或 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$.

而 $AB:EL=BE:HI$, $HI=\dfrac{BE\times EL}{AB}$.

$$BG=2\,BE-BC-HI$$
$$=2(3\,\phi_2-\phi_4)-\phi_2-(3\,\phi_2-\phi_4)\frac{\phi_3}{\phi_1}$$
$$=5\,\phi_2-5\,\phi_4+\phi_6$$

即 $BG=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$為所求五分弧通弦率數.

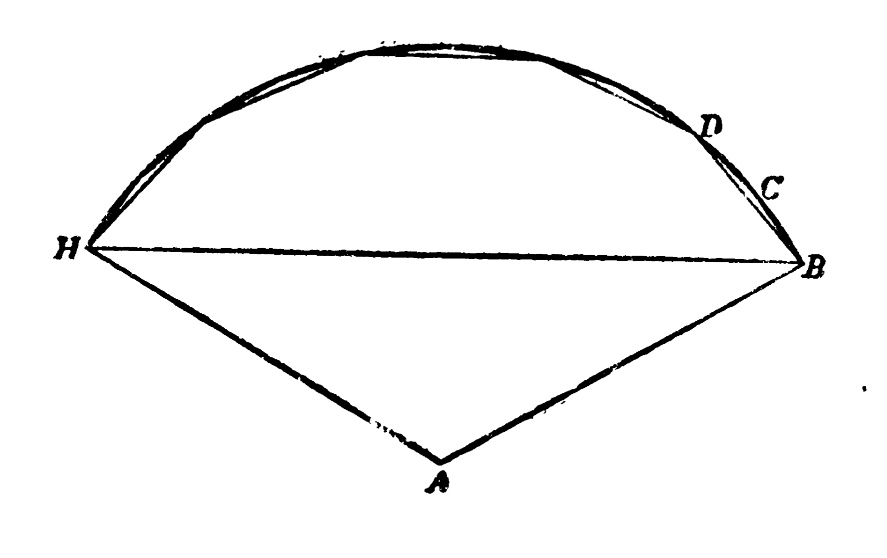
按此"隔一分加減之法"$\left(\text{即}\,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\cdots\cdots\right)$較"逐位遞求"者,固爲易矣.然析至千萬分,亦不勝其繁;

故又設以兩分數弧通弦率數,(如$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$),求兩分數乘得一分數弧通弦率數,(如$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{1000}$)之法.此法項名達稱爲"易率法,"徐有壬稱爲"借徑術."其法如下.

e. $\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數.

以A爲圓心,AB爲半徑.$BCD\cdots\cdots H$爲10分全弧,BH爲10分弧通弦.BC爲一分弧通弦,BD爲二分弧通弦,而BCD弧爲2分弧,亦爲全弧之$\frac{1}{5}$.

如令$AB=\phi_1=\phi'_1$, $BD=\phi'_2$,可以求得ϕ_4,,$\phi'_5\cdots\cdots$



第二十二圖

即 $$\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1},\ \phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}$$

$$\phi'_6=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_4}{\phi_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

已知 $$\phi'_2=BD=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

及 $$\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}=4\phi_3-\phi_5.$$

則 $$\phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}=32\frac{\phi_4}{4}-192\frac{\phi_6}{4\cdot16}+192\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+128\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+192\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+384\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+896\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

同理，$$\phi'_6=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_4}{\phi_1}=2048\frac{\phi_6}{4\cdot16}-20480\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+61440\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-40960\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-20480\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-24576\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

但 $BH=5\phi'_2-5\phi'_4+\phi'_6$

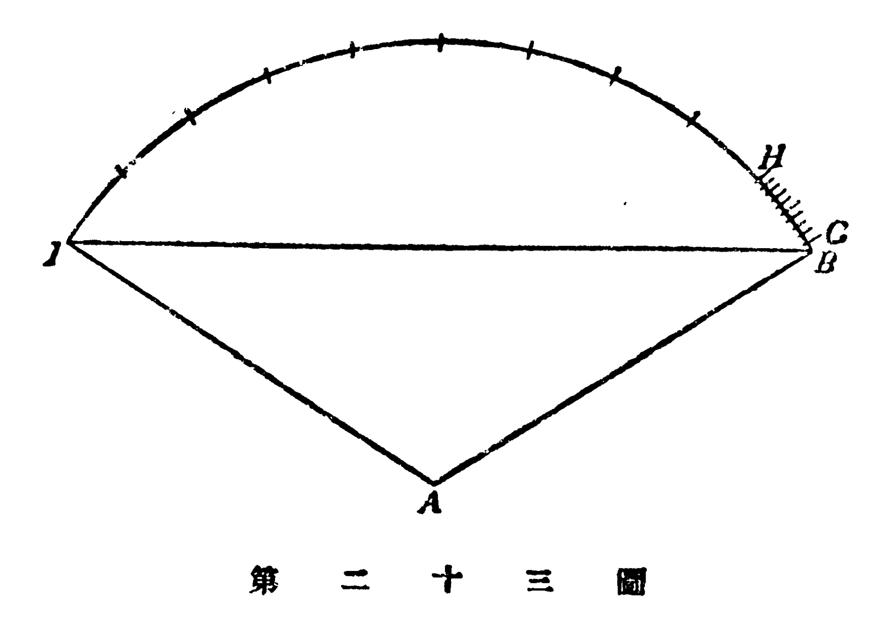
故 $$BH=10\phi_2-165\frac{\phi_4}{4}+3003\frac{\phi_6}{4\cdot16}-21450\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$

$$+60775\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-41990\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$-22610\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-29716\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

爲10分全弧通弦率數.

$f°$. $\frac{1}{100}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ 分弧通弦率數,求全弧通弦率數,



第二十三圖

以 A 爲圓心,AB 爲半徑.$BCHI$ 爲100分全弧.BI 爲100分全弧通弦.BC 爲1分弧通弦.BH 爲10分弧通弦.而 BCH 爲10分弧,亦爲全弧之 $\frac{1}{10}$.

如令 $AB=\phi_1=\phi'_1$. $BH=\phi'_2$ 可以求得 ϕ'_4, ϕ'_6,……

即　$\phi'_3=\dfrac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}$, $\phi'_4=\dfrac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}$, $\phi'_6=\dfrac{\phi'_3\cdot\phi'_4}{\phi_1}$,……

令

$$\phi'_2=BH=10\,\phi_2-165\frac{\phi_4}{4}+3003\frac{\phi_6}{4\cdot16}-21450\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$

$$+60775\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-41990\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$-22610\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+29716\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

$$\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}=100\,\phi_3-3300\frac{\phi_5}{4}+168960\frac{\phi_7}{4\cdot16}$$

$$-4392960\frac{\phi_9}{4\cdot16^2}+65601526\frac{\phi_{11}}{4\cdot16^3}$$

$$-596377600\frac{\phi_{13}}{4\cdot16^4}+3355443200\frac{\phi_{15}}{4\cdot16^5}.$$

$$\phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}=1000\,\phi_4-49500\frac{\phi_6}{4}+4167900\frac{\phi_8}{4\cdot16}$$

$$-197227800\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^2}+5874133980\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^3}$$

$$-117332222280\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^4}$$

$$+1633711449432\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^5}.$$

$$\frac{\phi'_4}{4}=1000\frac{\phi_4}{4}-198000\frac{\phi_6}{4\cdot16}+16671600\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$

$$-788911200\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+23496535920\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$-469328889120\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$+6534845797728\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

同理 $\phi'_6=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_4}{\phi_1}=100000\,\phi_6-825000\,\frac{\phi_8}{4}$

$$+1239150000\frac{\phi_{10}}{4\cdot16}-112586100000\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^2}$$

$$+6943061510000\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^3}$$

$$-309389380780000\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^4}.$$

$$\frac{\phi'_6}{4\cdot16}=100000\frac{\phi_6}{4\cdot16}-33000000\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+4956600000\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$-450344400000\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$+27772246040000\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$-1237557523120000\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

$$\frac{\phi'_8}{4\cdot 16^2}=10^7\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}-462\times 10^7\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}+998844\times 10^6\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}$$

$$-134521464\times 10^6\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$+126777505624\times 10^5\frac{\phi_{16}}{3\cdot 16^6}.$$

$$\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}=10^9\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}-594\times 10^9\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}+1676268\times 10^8\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$-299349864\times 10^8\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}.$$

$$\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}=10^{11}\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}-726\times 10^{11}\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$+2527932\times 10^{11}\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}.$$

$$\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}=10^{13}\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}-858\times 10^{13}\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}.$$

$$\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}=10^5\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}.$$

但 $$BI=10\,\phi'_2-165\frac{\phi'_4}{4}+3003\frac{\phi'_6}{4\cdot 16}-21450\frac{\phi'_8}{4\cdot 16^2}$$

$$+60775\frac{\phi'_{10}}{4\cdot 16^3}-41990\frac{\phi'_{12}}{4\cdot 16^4}$$

$$-22610\frac{\phi'_{14}}{4\cdot 16^5}-29716\frac{\phi'_{16}}{4\cdot 16^6}.$$

故
$$BI=100\,\phi_2-166650\frac{\phi_4}{4}+333000030\frac{\phi_6}{4\cdot16}$$
$$-316350028500\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$
$$+17488840755750\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$
$$-6308081496200467700\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$
$$+159788556669249870\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$
$$-29921548583149662822280\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

即百分全弧通弦率數.

g°. $\frac{1}{1000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數.

如前說得

$$BJ=1000\,\phi_2-1666666500\frac{\phi_4}{4}+3333300000300\frac{\phi_6}{4\cdot16}$$
$$-3174492064314285000\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$
$$+1763520285668407555557500\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$
$$-641228160191006696204726700\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$+164397582457339380612970750787000\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$-3130853319350554100164704566287942800\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}$$

即千分全弧通弦率數.

h°. $\frac{1}{10000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{1000}$ 分弧通弦率數,求全弧通弦率數.

如前說得

$$BK=10000\,\phi_2-1666666665000\frac{\phi_4}{4}+3333333000000003000\frac{\phi_6}{4\cdot 16}$$

$$-3174602063492145714285000\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}$$

$$+176366694885396366840755555575000\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}$$

$$-64133291646681276243526696204727267000\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}$$

$$+1644441382779445747414934398395509212307870000\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$-31322640727114357526697869850597636645662879994270000\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}$$

卽萬分全弧通弦率數[13]

II°. 弧背求通弦率數法解.[14]

在前 f°（百分全弧通弦率數），g°（千分全弧通弦率數），h°（萬分全弧通弦率數）所得 BI, BJ, BK，可以比例相較而得弧背求通弦之率數，以其間并有共同之性質也.又因

$$\phi_4=\frac{\phi_2{}^3}{\phi_1{}^2},\ \phi_6=\frac{\phi_2{}^7}{\phi_1{}^6},\ \phi_{10}=\frac{\phi_2{}^9}{\phi_1{}^8}$$

$$\phi_{12}=\frac{\phi_2{}^{11}}{\phi_1{}^{10}}\cdots\cdots,\ \phi_{16}=\frac{\phi_2{}^{15}}{\phi_1{}^{14}}$$

故 BI, BJ, BK 可書爲

$$BI=(100\,\phi_2)-\frac{(100\,\phi_2)^3}{\dfrac{4(100)^3}{166650}\,\phi_1{}^2}$$

$$+\frac{(100\,\phi_2)^5}{\dfrac{4(100)^3}{166150}\cdot\dfrac{166650\times16(100)^2}{333000030}\,\phi_1{}^4}$$

(13)　以上見割圜密率捷法卷三，"法解上，"第 1–49 頁，道光己亥(1839)孟秋，石梁岑氏校刊.

(14)　以下見割圜密率捷法卷三，"法解上，"第49–59 頁.石梁岑氏校刊本.

$$-\frac{(100\phi_2)^7}{\frac{4(100)^8}{166650}\cdot\frac{1666650\times 16(100)^2}{333000030}\times\frac{333000030\times 16(100)^2}{316350028500}\phi_1^6}+\cdots\cdots,$$

$$=(100\,\phi_2)-\frac{(100\phi_2)^8}{24{,}0024\,\phi_1^2}+\frac{(100\,\phi_2)^5}{24{,}0024\times 80{,}07\,\phi_1^4}-\frac{(100\,\phi_2)^7}{24{,}0024\times 80{,}07\times 168{,}842\,\phi_1^6}$$

$$+\frac{(100\,\phi_2)^9}{2{,}40024\times 80{,}07\times 168{,}42\times 28941\phi_1^8}$$

$$-\frac{(100\,\phi_2)^{11}}{24{,}0029\times 80{,}07\times 168{,}42\times 289{,}41\times 443{,}59\,\phi_1^{10}}+\cdots\cdots.$$

$$BJ=(1000\,\phi_2)-\frac{(1000\,\phi_2)^3}{\frac{4(1000)^3}{166666500}\phi_1^2}+\frac{(1000\,\phi_2)^5}{\frac{4(1000)^8}{166666500}\cdot\frac{166666500\times 16(1000)^2}{33333000000300}\phi_1^4}$$

$$-\frac{(1000\,\phi_2)^7}{\frac{4(1000)^3}{166666500}\cdot\frac{166666500\times 16(1000)^2}{33333000000300}\times\frac{33333000000300\times 16(1000)^2}{31744920643142850 00}\phi_1^6}+\cdots\cdots;$$

$$=(1000\,\phi_2)-\frac{(1000\,\phi_2)^3}{24{,}000024\,\phi_1^{\,2}}+\frac{(1000\,\phi_2)^5}{24{,}000024\times 80{,}0007\,\phi_1^{\,4}}$$

$$-\frac{(1000\phi_2)^7}{24{,}000024\times 80{,}0007\times 168{,}0042\phi_1^{\,6}}$$

$$+\frac{(1000\,\phi_2)^9}{24{,}000024\times 80{,}0007\times 168{,}0042\times 288{,}014\,\phi_1^{\,8}}$$

$$-\frac{(1000\phi_2)^{11}}{24{,}000024\times 80{,}0007\times 168{,}0042\times 288{,}014\times 440{,}035\phi_1^{\,10}}+\cdots\cdots.$$

$$BK=(10000\,\phi_2)-\frac{(10000\,\phi_2)^3}{\frac{4(10000)^3}{166666665000}\phi_1^{\,2}}+\frac{(10000\,\phi_2)^5}{\frac{4(10000)^3}{166666665000}\cdot\frac{166666665000\times 16(10000)^2}{333333300000003000}\phi_1^{\,4}}$$

$$-\frac{(1000\,\phi_2)^7}{\frac{4(10000)^3}{166666665000}\cdot\frac{166666665000\times 16(10000)^2}{333333300000003000}\times\frac{333333300000003000\times 16(10000)^2}{317460206349214571428 50000}\phi_1^{\,6}}$$

$$+\cdots\cdots;$$

$$BK=(10000\ \phi_2)-\frac{(10000\ \phi_2)^3}{24{,}00000024\ \phi_1^2}+\frac{(100000\ \phi_2)^5}{24{,}00000024\times 80{,}000007\ \phi_1^4}$$

$$-\frac{(10000\ \phi_2)^7}{24{,}00000024\times 80{,}000007\times 168{,}000042\ \phi_1^6}$$

$$+\frac{(100000\ \phi_2)^9}{24{,}00000024\times 80{,}000007\times 168{,}000042\times 288{,}00014\ \phi_1^8}$$

$$-\frac{(100000\ \phi_2)^{11}}{24{,}00000024\times 80{,}000007\times 168{,}000042\times 288{,}00014\times 440{,}00035\ \phi_1^{10}}$$

$$+\frac{(100000\phi_2)^{13}}{24{,}00000024\times 80{,}000007\times 168{,}000042\times 288{,}00014\times 440{,}00035\times 624{,}00075\phi_1^{12}}$$

$$-\frac{(100000\phi_2)^{15}}{24{,}00000024\times 80{,}000007\times 168{,}000042\times 288{,}00014\times 440{,}00035\times 624{,}00075\times 840{,}0014\phi_1^{14}}$$

$$+\cdots\cdots\cdots.$$

今比較 BI, BJ, BK 各項分母奇零之差,逼弧愈近則愈微.

例如 BI, BJ, BK 第二項分母逐次爲 24,0024, 24,000024, 24,00000024 是也.

若徑以(全)弧背爲二率(卽 $2a=1000\cdots\cdots000\ \phi_2$)則奇零必盡,而分母爲 24,80,168,288,624,840 等整數.

此時之通弦$=c$, 而 $r=\phi_1$, 則得

$$c=2a-\frac{(2a)^3}{24\,r^2}+\frac{(2a)^5}{24\times80\,r^4}-\frac{(2a)^7}{24\times80\times168\,r^6}$$

$$+\frac{(2a)^9}{24\times80\times168\times288\,r^8}$$

$$-\frac{(2a)^{11}}{24\times80\times168\times288\times440\,r^{10}}$$

$$+\frac{(2a)^{13}}{24\times80\times168\times288\times440\times624\,r^{12}}$$

$$-\frac{(2a)^{15}}{24\times80\times168\times288\times440\times624\times840\,r^{14}}$$

$$+\cdots\cdots;$$

$$=2a-\frac{(2a)^3}{4\times6\,r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\times6\times20\,r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\times6\times20\times42\,r^6}$$

$$+\frac{(2a)^9}{4^4\times6\times20\times42\times72\,r^8}$$

$$-\frac{(2a)^{11}}{4^5\times 6\times 20\times 42\times 72\times 110\, r^{10}}$$

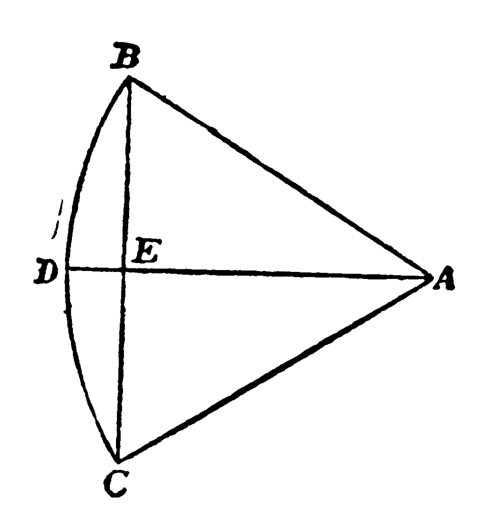
$$+\frac{(2a)^{13}}{4^6\times 6\times 20\times 42\times 72\times 110\times 156\, r^{12}}$$

$$-\frac{(2a)^{15}}{4^7\times 6\times 20\times 42\times 72\times 110\times 156\times 210\, r^{14}}+\cdots\cdots.$$

故 $$c=2a-\frac{(2a)^3}{4\cdot\lfloor 3\; r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^6}+\frac{(2a)^9}{4^4\cdot\lfloor 9\cdot r^8}$$

$$-\frac{(2a)^{11}}{4^5\cdot\lfloor 11\cdot r^{10}}+\frac{(2a)^{13}}{4^6\lfloor 13\cdot r^{12}}$$

$$-\frac{(2a)^{15}}{4^7\cdot\lfloor 15\cdot r^{14}}+\cdots\cdots\text{(IV)}$$



第二十四圖

設以 $BD=a$ 爲(半)弧背, $BDC=2a$ 爲(全)弧背, $BD=c$ 爲通弦, $AB=r$ 爲半徑,而 d 爲全徑. 又 $DE=$(全)弧背 $(2a)$ 之矢. 又爲半弧背(a)之正矢,則

$$c=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n-1}}{4^{n-1}\, r^{2(n-1)}\,(2n-1)!}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(IV)}'$$

III. 通弦求弧背率數法解.[15]

(15) 以下見割圜密率捷法卷三,"法解上,"第59–71頁 道光己亥(1839)孟秋,石梁岑氏校刊.

已知弧背求通弦率數法,再由通弦求弧背率數法,李善蘭稱爲"級數回求,"徐有壬稱爲"還原術,"其法如下:

蓋因 $\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}$, $\phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}$, $\phi'_6=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_4}{\phi_1}$,

$\phi'_8=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_6}{\phi_1}$, $\phi'_{10}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_8}{\phi_1}$, $\phi'_{12}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{10}}{\phi_1}$,

$\phi'_{14}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{12}}{\phi_1}$, $\phi'_{16}=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_{14}}{\phi_1}$ 之關係,

令 $$\phi'_2=c=2a-\frac{(2a)^3}{4\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(2a)^9}{4^4\cdot\lfloor 9\cdot r^8}-\frac{(2a)^{11}}{4^5\cdot\lfloor 11\cdot r^{10}}+\frac{(2a)^{13}}{4^6\cdot\lfloor 13\cdot r^{12}}.$$

$$\phi_3'=\frac{(2a)^2}{r}-2\frac{(2a)^4}{4\lfloor 3\cdot r^3}+5\frac{1}{3}\frac{(2a)^6}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^5}-16\cdot\frac{(2a)^8}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^7}$$

$$+51\frac{1}{5}\cdot\frac{(2a)^{10}}{4^4\lfloor 9\cdot r^9}-170\frac{2}{3}\cdot\frac{(2a)^{12}}{4^5\lfloor 11\cdot r^{11}}$$

$$+585\frac{1}{7}\cdot\frac{(2a)^{14}}{4^6\lfloor 13\cdot r^{13}}.$$

$$\phi'_4=\frac{(2a)^3}{r^2}-3\frac{(2a)^5}{4\lfloor 3\cdot r^4}+13\frac{(2a)^7}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^6}-68\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^9}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^8}$$

$$+402\frac{3}{5}\cdot\frac{(2a)^{11}}{4^4\,\underline{|9}\cdot r^{10}}-2555\frac{(2a)^{13}}{4^5\,\underline{|11}\cdot r^{12}}$$

$$+17082\frac{1}{35}\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^6\,\underline{|13}\cdot r^{14}}.$$

$$\phi'_6=\frac{(2a)^5}{r^4}-5\frac{(2a)^7}{4\,\underline{|3}\cdot r^6}+38\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^9}{4^2\,\underline{|5}\cdot r^8}$$

$$-378\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^{11}}{4^3\,\underline{|7}\cdot r^{10}}+4417\frac{(2a)^{13}}{4^4\,\underline{|9}\cdot r^{12}}$$

$$-58085\frac{(2a)^{15}}{4^5\cdot\underline{|11}\cdot r^{14}}.$$

$$\phi'_8=\frac{(2a)^7}{r^6}-7\frac{(2a)^9}{4\,\underline{|3}\cdot r^8}+77\frac{(2a)^{11}}{4^2\,\underline{|5}\cdot r^{10}}$$

$$-1117\frac{2}{3}\cdot\frac{(2a)^{13}}{4^3\,\underline{|7}\cdot r^{12}}+19600\frac{1}{5}\frac{(2a)^{15}}{4^4\,\underline{|9}\cdot r^{14}}.$$

$$\phi'_{10}=\frac{(2a)^9}{r^8}-9\frac{(2a)^{11}}{4\,\underline{|3}\cdot r^{10}}+129\frac{(2a)^{13}}{4^2\cdot\underline{|5}\cdot r^{12}}$$

$$-2473\frac{(2a)^{15}}{4^3\cdot\underline{|7}\cdot r^{14}}.$$

$$\phi'_{12}=\frac{(2a)^{11}}{r^{10}}-11\frac{(2a)^{13}}{4\,\underline{|3}\cdot r^{12}}+194\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^2\,\underline{|5}\cdot r^{14}}$$

$$\phi_{14}=\frac{(2a)^{13}}{r^{12}}-13\frac{(2a)^{15}}{4\,\underline{|3}\cdot r^{14}}.$$

$$\phi'_{16}=\frac{(2a)^{15}}{r^{14}}.$$

故
$$\phi'_2+\frac{\phi'_4}{4\lfloor\underline{3}}+\frac{9\,\phi'_6}{4^2\lfloor\underline{5}}+\frac{9\cdot25\,\phi'_8}{4^3\lfloor\underline{7}}+\frac{9\cdot25\cdot49\,\phi'_{10}}{4^4\lfloor\underline{9}}$$
$$+\frac{9\cdot25\cdot49\cdot81\,\phi'_{12}}{4^5\lfloor\underline{11}}+\frac{9\cdot25\cdot49\cdot81\cdot121\,\phi'_{14}}{4^6\lfloor\underline{13}}$$
$$+\frac{9\cdot25\cdot49\cdot81\cdot121\cdot169\,\phi'_{16}}{4^7\lfloor\underline{15}}=2a.$$

卽
$$2a=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\lfloor\underline{3}\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot c^5}{4^2\cdot\lfloor\underline{5}\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot c^7}{4^3\cdot\lfloor\underline{7}\cdot r^6}$$
$$+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot c^9}{4^4\cdot\lfloor\underline{9}\cdot r^8}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot9^2\cdot c^{11}}{4^5\lfloor\underline{11}\cdot r^{10}}+\cdots\cdots;$$

或
$$2a=\sum_1^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot3^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}(2n-1)!}c^{2n-1},\qquad \text{(VI)}.$$

IV°. 弧背正弦相求法解.[16]

因 $\sin a=\frac{c}{2}$，故(IV)式可化爲

$$\sin a=a-\frac{a^8}{\lfloor\underline{3}\cdot r^2}+\frac{a^5}{\lfloor\underline{5}\cdot r^4}-\frac{a^7}{\lfloor\underline{7}\cdot r^6}+\frac{a^9}{\lfloor\underline{9}\cdot r^8}-\frac{a^{11}}{\lfloor\underline{11}\cdot r^{10}}$$
$$+\frac{a^{13}}{\lfloor\underline{13}\cdot r^{12}}-\frac{a^{15}}{\lfloor\underline{15}\cdot r^{14}}+\cdots\cdots;$$

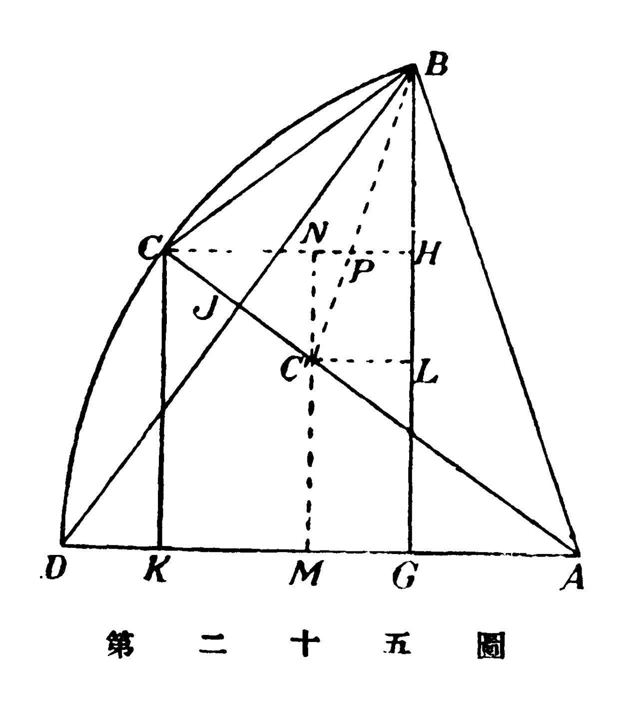
(16) 以下見割圜密率捷法卷三,"法解上,"第 71-73 頁.

或 $\sin a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}(2n-1)!}$.　(II).

V°. 分弧正矢率數,求全弧正矢率數法解.(17)

分弧正矢,求全弧正矢,卽弧背求正矢率數所自起.其法先以幾何法證 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000, 10000 弧之正矢,如下 $a°, b°, c°, d°, e°, f°, g°, h°$ 所示:

$a°$. $\frac{1}{2}$分弧正矢率數,求全弧正矢率數.



第二十五圖

以 A 爲圜心, AB 爲半徑,平分 BD 弧於 C.聯 BC,

(17) 以下見割圜密率捷法卷四,"法解下,"第 1-23 頁.道光己亥(1839)孟秋,石梁岑氏校刊.

BD, AC 各線.作 $BC'=BC$.

則 $\triangle_s$ ABC, BCC' 爲連比例 $\triangle_s$.

即 $$AB:BC=BC:CC'$$

或 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$$

而 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 爲一,二,三率.

又自 B, C, C', 作 AD 之直垂線 BG, CK, $NC'M$.

自 C, C' 作 AD 之平行線 $CNPH$, $C'L$.

則 $\triangle_s$ ABC, BCC', $CC'P$, $2\cdot C'PN$ 爲連比例 $\triangle_s$; $\triangle_s$ BCJ, $C'PN$ 爲相似形.

即 $$AB:CJ=CC':PN.$$

如圖 $$AB=\phi_1,\ BC=\phi_2,\ CC'=\phi_3,$$

$$CJ=DK=MG=\text{vers }\alpha=\frac{\phi_3}{2},$$

$$CP=2\cdot\frac{\phi_3}{2},\ C'P=\phi_4,\ PN=\frac{\phi_5}{2}.$$

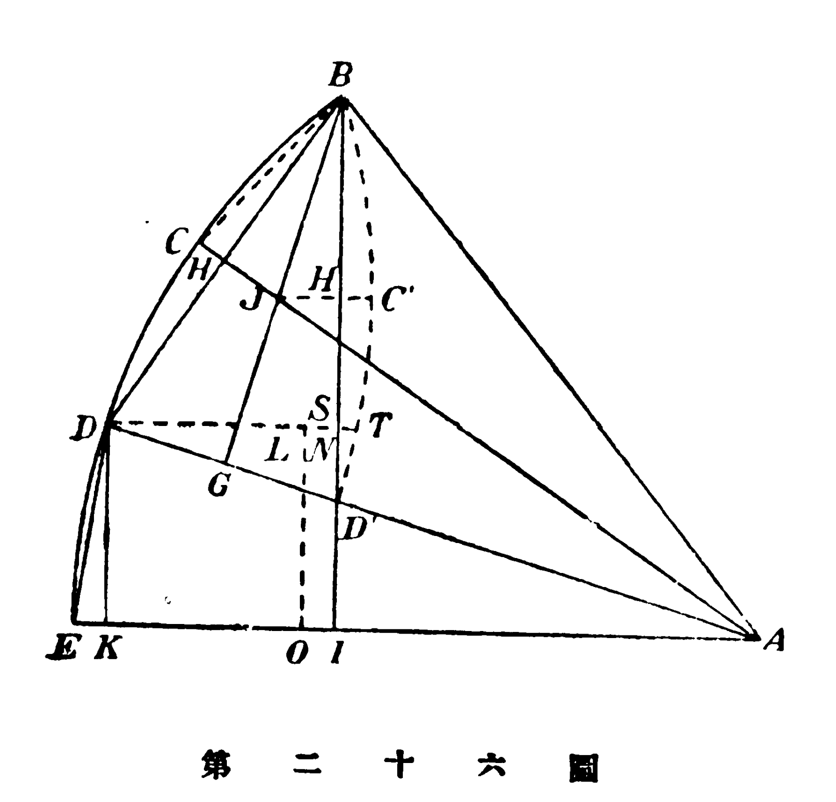
故 $$AB:CJ=CC':PN$$

可書爲 $$\phi_1:\frac{\phi_3}{2}=2\cdot\frac{\phi_3}{2}:\frac{\phi_5}{2}.$$

$$\begin{aligned}\text{vers }2\alpha&=DG\\&=(CP-PN)+(DK+MG)\end{aligned}$$

$$=\left(2\cdot\frac{\phi_3}{2}-2\frac{\phi_5}{2^2}\right)+2\cdot\frac{\phi_3}{2}=4\frac{\phi_3}{2}-2\frac{\phi_5}{2^2}\cdot$$

$b°$. $\frac{1}{3}$分弧正矢率數,求全弧正矢率數.



第二十六圖

以 A 爲圓心,AB 爲半徑,BC, CD, DE 爲 $\frac{1}{3}$ 弧 $=a$.

BCD 爲 $\frac{2}{3}$ 弧,$BCDE$ 爲 $\frac{3}{3}$ 弧.

又

$$CH,\ EK=\text{vers}\ a,$$

$$DG=\text{vers}\ 2a$$

$$EI=\text{vers}\ 3a$$

試以 BJG 爲軸,將 $BCDG$ 面右展爲 $BC'D'G$. 作 $LN=CH$,

則 $CH=C'H'=EK=LN=\text{vers } a,\ D'G=\text{vers } 2a,\cdots\cdots$

而 $\triangle_s\ ADE, DD'T$ 幾爲相似, $DD' \fallingdotseq DT$. (按此兩 $\triangle_s$ 雖非絕對相似,而所差已至微細).

如圖因前例,令 $AB=\phi_1,\ DD'=8\frac{\phi_3}{2}-4\frac{\phi_5}{2^2}$。

又因 $AD:EK=DD':ST$,

即 $\phi_1:\frac{\phi_3}{2}=\left(8\frac{\phi_3}{2}-4\frac{\phi_5}{2^2}\right):ST.$

則 $\text{vers } 3a=EI$

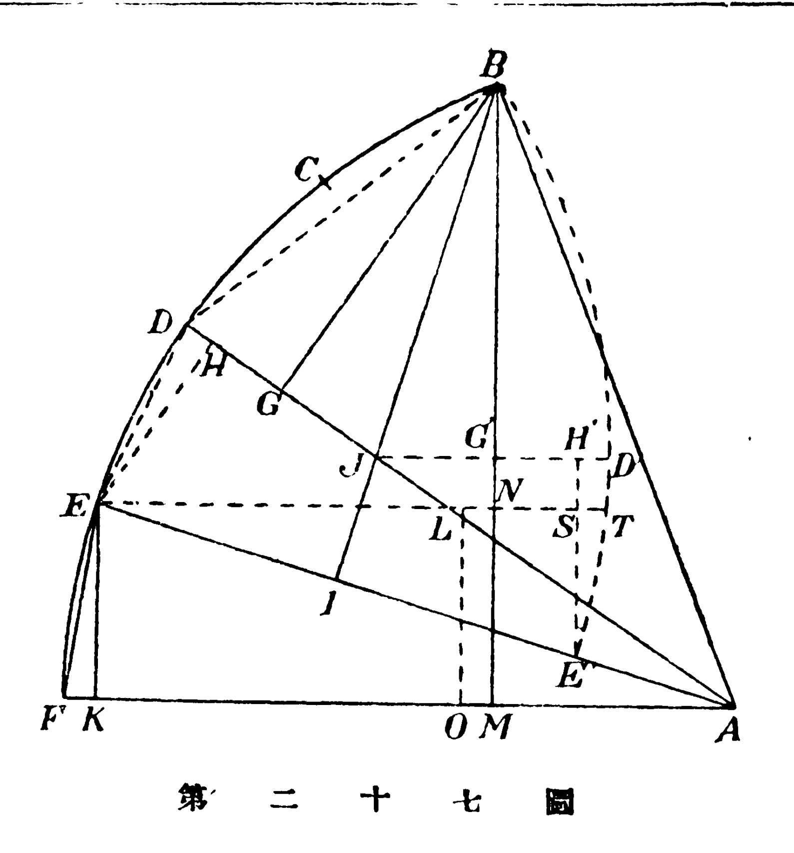
$$=(DD'-ST-C'H')+(EK+LN)$$

$$=\left\{\left(8\frac{\phi_3}{2}-4\frac{\phi_5}{2^2}\right)-\left(8\frac{\phi_5}{2^2}-4\frac{\phi_7}{2^3}\right)-\frac{\phi_3}{2}\right\}$$

$$+2\frac{\phi_3}{2}。$$

$$=9\frac{\phi_3}{2}-12\frac{\phi_5}{2^2}+4\frac{\phi_7}{2^3}。$$

c°. $\frac{1}{4}$ 分弧正矢率數,求全弧正矢率數



第二十七圖

以 A 爲圜心，AB 爲半徑；BC, CD, DE, EF 爲 $\frac{1}{4}$ 弧 $=a$, BCD 爲 $\frac{2}{4}$ 弧 $=2a$, $BCDE$ 爲 $\frac{3}{4}$ 弧 $=3a$, $BCDEF$ 爲 $\frac{4}{4}$ 弧 $=4a$.

試以 BJI 爲軸，將 $BCDEI$ 面右展爲 $BD'E'I$.

而 $\triangle_s$ AEF, $EE'T$ 幾爲相似. $EE' \doteqdot ET$.

如圖因前例，令 $AB=\phi_1$，作 $LN=DH$.

$$EE'=18\frac{\phi_3}{2}-24\frac{\phi_5}{2^2}+8\frac{\phi_7}{2^3}$$

又因 $AE : FK = EE' : ST$,

即 $\phi_1 : \frac{\phi_3}{2} = \left(18\frac{\phi_3}{2} - 24\frac{\phi_5}{2^2} + 8\frac{\phi_7}{2^3}\right) : ST.$

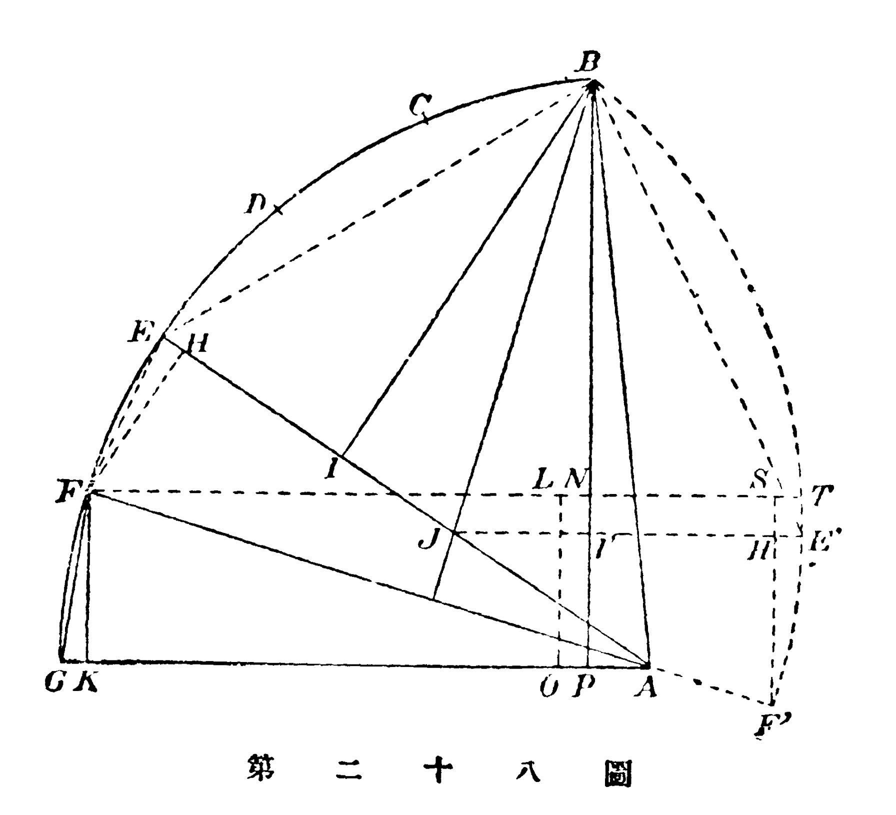
則 $\text{vers}\, 4a = FM$

$$= (EE' - ST - D'G') + (FK + LN)$$

$$= \left\{\left(18\frac{\phi_3}{2} - 24\frac{\phi_5}{2^2} + 8\frac{\phi_7}{2^3}\right) - \left(18\frac{\phi_5}{2^2} - 24\frac{\phi_7}{2^3} + 8\frac{\phi_9}{2^4}\right) - \left(4\frac{\phi_3}{2} - 2\frac{\phi_5}{2^2}\right)\right\} + 2\frac{\phi_3}{2}.$$

$$= 16\frac{\phi_3}{2} - 40\frac{\phi_5}{2^2} + 32\frac{\phi_7}{2^3} - 8\frac{\phi_9}{2^4}.$$

$d°$. $\frac{1}{5}$ 分弧正矢率數,求全弧正矢率數.



第二十八圖

如圖因前例△, AFG, $FF'T$ 幾爲相似, $FF' \fallingdotseq FT$.

令 $AB=\phi_1$, 作 $LN=EH$.

$$FF'=32\frac{\phi_3}{2}-80\frac{\phi_5}{2^2}+64\frac{\phi_7}{2^3}-16\frac{\phi_9}{2^4}.$$

又因 $AF:GK=FF':ST.$

卽 $\phi_1:\frac{\phi_3}{2}=\left(32\frac{\phi_3}{2}-80\frac{\phi_5}{2^2}+64\frac{\phi_7}{2^3}-16\frac{\phi_9}{2^4}\right):ST.$

則

$$\begin{aligned}\text{vers } 5a&=GP\\&=(FF'-ST-E'I')+(GK+LN)\\&=\left\{\left(32\frac{\phi_3}{2}-80\frac{\phi_5}{2^2}+64\frac{\phi_7}{2^3}-16\frac{\phi_9}{2^4}\right)\right.\\&\quad-\left(32\frac{\phi_5}{2^2}-80\frac{\phi_7}{2^3}+64\frac{\phi_9}{2^4}-16\frac{\phi_{11}}{2^5}\right)\\&\quad\left.-\left(9\frac{\phi_3}{2}-12\frac{\phi_5}{2^2}+4\frac{\phi_7}{2^3}\right)\right\}+2\frac{\phi_3}{2}\\&=25\frac{\phi_3}{2}-100\frac{\phi_5}{2^2}+140\frac{\phi_7}{2^3}-80\frac{\phi_9}{2^4}+16\frac{\phi_{11}}{2^5}.\end{aligned}$$

e. $\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$ 分弧正矢率數,求全弧正矢率數.

如前有 $\frac{1}{10}$ 分弧通弦,求全弧通弦之例.

令 $AB=\phi_1=\phi'_1.$

$$\frac{\phi'_3}{2}=25\frac{\phi_3}{2}-100\frac{\phi_5}{2^2}+140\frac{\phi_7}{2^3}-80\frac{\phi_9}{2^4}+16\frac{\phi_{11}}{2^5}.$$

$$\frac{\phi'_5}{2^2}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{2^2\,\phi_1}=625\frac{\phi_5}{2^2}-5000\frac{\phi_7}{2^3}+17000\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$-32000\frac{\phi_{11}}{2^5}+36400\frac{\phi_{13}}{2^6}-25600\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$+10880\frac{\phi_{17}}{2^9}.$$

但由 a° 知 $\text{vers}\ 10a=\text{vers}\ 2(5a)$

$$=4\frac{\phi'_3}{2}-2\frac{\phi'_5}{2^2}$$

$$=100\frac{\phi_3}{2}-1650\frac{\phi_5}{2^2}+10560\frac{\phi_7}{2^3}-34320\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+64064\frac{\phi_{11}}{2^5}-72800\frac{\phi_{13}}{2^6}+51200\frac{\phi_{15}}{2^7}-21760\frac{\phi_{17}}{2^8}.$$

f. $\frac{1}{100}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ 分弧正矢率數,求全弧正矢率數.

如前例有 $\frac{1}{10}$ 分弧通弦,求全弧通弦之例.

令 $AB=\phi_1=\phi'_1$.

$$\frac{\phi'_3}{2}=100\frac{\phi_3}{2}-1650\frac{\phi_5}{2^2}+10560\frac{\phi_7}{2^3}-34320\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+64064\frac{\phi_{11}}{2^5}-72800\frac{\phi_{13}}{2^6}+51200\frac{\phi_{15}}{2^7}-21760\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_5}{2^2}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{2^2\phi_1}=10000\frac{\phi_5}{2^2}-330000\frac{\phi_7}{2^3}+4834500\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$-41712000\frac{\phi_{11}}{2^5}+237582400\frac{\phi_{13}}{2^6}-950809600\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$+2781374080\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_7}{2^3}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{2^3\,\phi_1}=1000000\frac{\phi_7}{2^3}-49500000\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+1133550000\frac{\phi_{11}}{2^5}-15976125000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$-155601600000\frac{\phi_{15}}{2^7}+1115359800000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_9}{2^4}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_7}{2^4\,\phi_1}=100000000\frac{\phi_9}{2^4}-1600000000\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

$$-205590000000\frac{\phi_{13}}{2^6}-4025010000000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$+55653958250000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{11}}{2^5}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_9}{2^5\,\phi_1}=10000000000\frac{\phi_{11}}{2^5}-825000000000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+325050000000000\frac{\phi_{15}}{2^7}-814852500000000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{13}}{2^6}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{11}}{2^6\phi_1}=1000000000000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$-99000000000000\frac{\phi_{15}}{2^7}+4717350000000000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{15}}{2^7}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{13}}{2^7\phi_1}=100000000000000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$-11550000000000000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{17}}{2^8}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{15}}{2^8\phi_1}=1000000000000000000\frac{\phi_{17}}{2^8}.$$

由 $e°$ 知 $\text{vers}\,100\,a=\text{vers}\,10(10\,a)$

$$=100\frac{\phi'_3}{2}-1650\frac{\phi'_5}{2^2}+10560\frac{\phi'_7}{2^3}-34320\frac{\phi'_9}{2^4}$$

$$+64064\frac{\phi'_{11}}{2^5}-72800\frac{\phi'_{13}}{2^6}+51200\frac{\phi'_{15}}{2^7}$$

$$-21760\frac{\phi'_{17}}{2^8}.$$

$$=10000\frac{\phi_3}{2}-16665000\frac{\phi_5}{2^2}+11105556000\frac{\phi_7}{2^2}$$

$$-3962700357000\frac{\phi_9}{2^4}+879191119206400\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

$$-1328777486982400000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+1454938338493696000 0\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$-12065076171958974080000\frac{\phi_{17}}{2^8}.$$

$g°$. $\frac{1}{1000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}$ 分弧正矢率數，求全弧正矢率數.

如前例:

vers 1000 a

$$=1000000\frac{\phi_3}{2}-166666500000\frac{\phi_5}{2^2}$$

$$+111110555556000000\frac{\phi_7}{2^3}.$$

$$-3968197412928570000000\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+881807760319271747864 0000\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

$$-1336038962405793857919240000000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+14681218296737881860883020960000000\frac{\phi_{15}}{2^7}.$$

$$-122337490975344514205598647433108000000\frac{\phi_{17}}{2^8}.$$

h°. $\frac{1}{10000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{1000}$ 分弧正矢率數,求全弧正矢率數.

如前例

$$\text{vers}\,10000\,a=100000000\frac{\phi_3}{2}-1666666650000000\frac{\phi_5}{2^2}+11111110555555560000000\frac{\phi_7}{2^3}$$

$$-3968253412698432142857000000 0\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+881833950554746281490634920640000 00\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

$$-13361117123618438846616841030019240000000 0\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+146825410039739845665361178012686914209600000000 0\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$-1223544484127407718443098957543875917905100310800000000\frac{\phi_{17}}{2^8}.$$

VI. 弧背求正矢率數法解.[18]

在前 $f°$, $g°$, $h°$ 所得百分全弧正矢率數 vers 100 a, 千分全弧正矢率數 vers 1000 a, 萬分全弧正矢率數 vers 10000 a, 可如前 II°"弧背求通弦率法解"之例,比例相較,得"弧背求正矢率數,"以其間幷有共同之性質也.又因

$$\phi_3=\frac{\phi_2^2}{\phi_1},\ \phi_5=\frac{\phi_2^4}{\phi_1^3},$$

$$\phi_7=\frac{\phi_2^6}{\phi_1^5},\ \phi_9=\frac{\phi_2^8}{\phi_1^7}$$

$$\phi_{11}=\frac{\phi_2^{10}}{\phi_1^9},\ \cdots\cdots,\ \phi_{17}=\frac{\phi_2^{16}}{\phi_1^{15}},$$

$$\text{vers }100\,a=\frac{(100\phi_2)^2}{2\phi_1}-\frac{(100\,\phi_2)^4}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\phi_1^3}$$

$$+\frac{(100\,\phi_2)^6}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\cdot\frac{2\times16665000\times(100)^2}{11105556000}\phi_1^5}$$

---

(18) 以下見割圜密率捷法卷四,"法解下,"第 23-31 頁,道光己亥(1839)孟秋石梁岑氏校刊.

$$-\frac{(100\phi_2)^8}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\cdot\frac{2\times16665000\times(100)^2}{11105556000}\cdot\frac{2\times11105556000\times(100)^2}{3962700357000}\phi_1^7}$$

$$+\frac{(100\,\phi_2)^{10}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{166650000}\cdots\cdots\frac{2\times11105556000\times(100)^2}{2662700357000}\cdot\frac{2\times3962700357000\times(100)^2}{779191119206400}\phi_1^9}$$

$$-\frac{(100\,\phi_2)^{12}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{166650000}\cdots\cdots\frac{2\times3963700057000\times(100)^2}{879191119206400}\cdot\frac{2\times879191119206400\times(100)^2}{13287774869824040}\phi_1^{11}}$$

$$+\frac{(100\,\phi_2)^{14}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{166650000}\cdots\cdots\frac{2\times879191119206400\times(100)^2}{13287774869824000}\cdot\frac{2\times13287774869824000\times(100)^2}{14549383384936960000}\phi_1^{18}}$$

$$-\frac{(100\phi_2)^{16}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{166650000}\cdots\cdots\frac{2\times13287774869824000\times(100)^2}{14549383384936960000}\cdot\frac{2\times14549383384936960000\times(100)^2}{120657617195897408000}\phi_1^{15}}$$

即 vers 100 a

$$=\frac{(100\phi_2)^2}{2\phi_1}-\frac{(100\phi_2)^4}{2\times 12.0012\phi_1{}^3}$$

$$+\frac{(100\ \phi_2)^6}{2\times 12.0012\times 300.12\ \phi_1{}^5}$$

$$-\frac{(100\ \phi_2)^8}{2\times 12.0012\times 30.012\times 56.05\ \phi_1{}^7}$$

$$+\frac{(100\ \phi_2)^{10}}{2\times 12.0012\times 30.012\times 56.05\times 90.14\phi_1{}^9}$$

$$-\frac{(100\phi_2)^{12}}{2\times 12.0012\times 30.012\times 56.05\times 90.14\times 132.33\ \phi_1{}^{11}}$$

$$+\frac{(100\ \phi_2)^{14}}{2\times 12.0012\times\cdots\cdots\times 132.33\times 182.65\ \phi_1{}^{13}}$$

$$-\frac{(100\ \phi_2)^{16}}{2\times 12.0012\times\cdots\cdots\times 182.65\times 241.1\phi_1{}^{15}}.$$

同理, vers 1000 a

$$=\frac{(1000\ \phi_2)^2}{2\ \phi_1}-\frac{(1000\ \phi_2)^4}{2\times 12.000012\ \phi_1{}^3}$$

$$+\frac{(1000\ \phi_2)^6}{2\times 12.000012\times 30.00012\ \phi_1{}^5}$$

$$-\frac{(10000\ \phi_2)^8}{2\times 12.000012\times 30.00012\times 56.0005\ \phi_1{}^7}$$

$$+\frac{(1000\,\phi_2)^{10}}{2\times 12.0012\times\cdots\cdots\times 56.0005\times 90.0014\,\phi_1^{9}}$$

$$-\frac{(10000\,\phi_2)^{12}}{2\times 12.0012\times \quad \times 90.0014\times 132.0033\,\phi_1^{11}}$$

$$+\frac{(1000\,\phi_2)^{14}}{2\times 12.0012\times\cdots\cdots\times 132.0033\times 182.0065\phi_1^{13}}$$

$$-\frac{(1000\,\phi_2)^{16}}{2\times 12.0012\times\cdots\cdots\times 182.0065\times 240.011\,\phi_1^{15}}$$

vers 10000 *a*

$$=\frac{(10000\phi_2)^2}{2\,\phi_1}-\frac{(10000\,\phi_2)^4}{2\times 12.00000012\,\phi_1^{3}}$$

$$+\frac{(10000\,\phi_2)^6}{2\times 12.00000012\times 30.0000012\,\phi_1^{5}}$$

$$-\frac{(10000\,\phi_2)^8}{2\times 12.00000012\times 30.00000\times 56.000005\,\phi_1^{7}}$$

$$+\frac{(10000\,\phi_2)^{10}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 56.000005\times 90.000014\,\phi_1^{9}}$$

$$-\frac{(10000\,\phi_2)^{12}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 90.000014\times 132.000033\,\phi_1^{11}}$$

$$+\frac{(10000\,\phi_2)^{14}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 132.000033\times 182.000065\,\phi_1^{13}}$$

$$-\frac{(10000\,\phi_2)^{16}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 182.000065\times 240.00011\,\phi_1^{15}}$$

若以半弧背 $a=100\cdots\cdots00\ a=100\cdots\cdots00\ \phi_2$,

全弧背 $2a=2\times100\cdots\cdots00\ \phi_2$

則 $$\operatorname{vers} a=\frac{a^2}{2r}-\frac{a^4}{2\times12r^3}+\frac{a^6}{2\times12\times30r^5}-\frac{a^8}{2\times12\times30\times56r^7}+\frac{a^{10}}{2\times12\times30\times56\times90r^9}$$
$$-\frac{a^{12}}{2\times12\times30\times56\times90\times132r^{11}}$$
$$+\frac{a^{14}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\times182r^{13}}$$
$$-\frac{a^{16}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\times182\times240r^{15}}$$
$$=\frac{a^2}{\lfloor 2\cdot r}-\frac{a^4}{\lfloor 4\cdot r^3}+\frac{a^6}{\lfloor 6\cdot r^5}-\frac{a^8}{\lfloor 8\cdot r^7}+\frac{a^{10}}{\lfloor 10\cdot r^9}$$
$$-\frac{a^{12}}{\lfloor 12\cdot r^{11}}+\frac{a^{14}}{\lfloor 14\cdot r^{13}}-\frac{a^{16}}{\lfloor 16\cdot r^{15}}.$$

或 $$\operatorname{vers} a=\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}(2n)!} \qquad \text{(III)}.$$

VII. 正矢求弧背法解.[19]

此與"通弦求弧背法解"同爲級數迴求法.

(19) 以下見割圜密率捷法卷四,"法解下,"第 31-37 頁. 道光己亥(1839)孟秋,石梁岑氏校刊.

因 $\phi'_5=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{\phi_1}$, $\phi'_7=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{\phi_1}$, $\phi'_9=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_7}{\phi_1}$, $\phi'_{11}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_9}{\phi_1}$

$\phi'_{13}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{11}}{\phi_1}$, $\phi'_{15}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{13}}{\phi_1}$, $\phi'_{17}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{15}}{\phi_1}$ 之關係,及

$$\begin{aligned}\text{vers}\, a=&\frac{\phi_3}{2}-\frac{\phi_5}{2\times12}+\frac{\phi_7}{2\times12\times30}-\frac{\phi_9}{2\times12\times30\times56}\\&+\frac{\phi_{11}}{2\times12\times30\times56\times90}\\&-\frac{\phi_{13}}{2\times12\times30\times56\times90\times132}\\&+\frac{\phi_{15}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\times182}\\&-\frac{\phi_{17}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\times182\times240};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\,\text{vers}\, a=&\phi_3-\frac{\phi_5}{12}+\frac{\phi_7}{12\times30}-\frac{\phi_9}{12\times30\times56}\\&+\frac{\phi_{11}}{12\times30\times56\times90}-\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56\times90\times132}\\&+\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}\\&-\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240}\end{aligned}$$

令 $\phi'_3 = 2\ \text{vers}\ \alpha = \phi_3 - \frac{\phi_5}{12} + \frac{\phi_7}{12\times30} - \frac{\phi_9}{12\times30\times56}$

$$+\frac{\phi_{11}}{12\times30\times56\times90} - \frac{\phi_{13}}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$-\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240},$$

$$\phi'_5 = \phi_5 - 2\frac{\phi_7}{12} + 4\frac{1}{2}\ \frac{\phi_9}{12\times30} - 11\frac{1}{3}\ \frac{\phi_{11}}{12\times30\times56}$$

$$+31\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56\times90} - 90\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+273\frac{1}{20}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182},$$

$$\phi'_7 = \phi_7 - 3\frac{\phi_9}{12} + 10\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{11}}{12\times30} - 42\frac{2}{3}\cdot\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56}$$

$$+195\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90}$$

$$-976\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132},$$

$$\phi'_9 = \phi_9 - 4\frac{\phi_{11}}{12} + 19\frac{\phi_{13}}{12\times30} - 106\frac{2}{3}\cdot\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56}$$

$$+685\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90},$$

$$\phi'_{11}=\phi_{11}-5\frac{\phi_{13}}{12}+30\frac{\phi_{15}}{12\times30}-215\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56},$$

$$\phi'_{13}=\phi_{13}-6\frac{\phi_{15}}{12}+43\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30},$$

$$\phi'_{15}=\phi_{15}-7\frac{\phi_{17}}{12},$$

$$\phi'_{17}=\phi_{17}.$$

故 $\phi'_3+\frac{\phi'_5}{12}+4\frac{\phi'_7}{12\times30}+36\frac{\phi'_9}{12\times30\times56}$

$$+576\frac{\phi'_{11}}{12\times30\times56\times90}$$

$$+14400\frac{\phi'_{13}}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+518400\frac{\phi'_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$+25401600\frac{\phi'_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240}$$

$$=\phi_3.$$

或 $\frac{a^2}{r}=\phi_3'+1^2\frac{\phi'_5}{12}+2^2\frac{\phi'_7}{12\times30}+2^2\cdot3^2\frac{\phi'_9}{12\times30\times56}$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\frac{\phi'_{11}}{12\times30\times56\times90}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\frac{\phi'_{13}}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot6^2\cdot\frac{\phi'_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot6^2\cdot7^2\cdot\frac{\phi'_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240}.$$

即 $$a^2=r\left\{(2\text{ vers }a)+\frac{1^2(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot4\,r}+\frac{1^2\cdot2^2(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\,r^2}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2(2\text{ vers }a)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}\right\}+\cdots\cdots,$$

或 $$a^2=2r\sum_1^\infty\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdots\cdots(n-2)^2(n-2)^2}{r^{n-1}(2n)!}. \qquad \text{(VIII)}$$

VIII°. 弧背矢相求法解.[20]

因 $$a^n=\frac{(2a)^{2n}}{2^{2n}}=\frac{(2a)^{2n}}{4^n}.$$

故(III)式可化爲

$$\text{vers }a=\frac{(2a)^2}{4\lfloor 2\cdot r}-\frac{(2a)^4}{4^2\lfloor 4\cdot r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\lfloor 6\cdot r^5}-\frac{(2a)^8}{4^5\cdot\lfloor 8\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

(20) 以下見割圜密率捷法卷四,"法解下,"第 37-38 頁.

或 $$\operatorname{vers} a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^{n}\cdot r^{2n-1}(2n)!}. \qquad \text{(V)}$$

15. 孔廣森之少廣正負術

孔廣森(1752-1786)顨軒孔氏所著書五十五少廣正負術外篇上稱:"密弧求法,宣城御史大夫梅公書中嘗載焉.至其弧背弦矢互求,亦各有乘除之法,世則罕有傳者,廣森幸得聞之於靈臺郎陳君際新."

弦求弧背

$$2a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^{2}\cdot 1^{2}\cdot 3^{2}\cdot\cdots\cdots(2n-5)^{2}(2n-3)^{2}}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}c^{2n-1}, \qquad \text{(VI)}$$

矢求弧背

$$a^{2}=2r\sum_{1}^{\infty}\frac{1^{2}\cdot 1^{2}\cdot 2^{2}\cdot\cdots\cdots(n-2)^{2}(n-1)^{2}}{r^{n-1}(2n)!}(2\operatorname{vers} a)^{n}, \qquad \text{(VIII)}$$

弧背求矢

$$\operatorname{vers} a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}(2n)!} \qquad \text{(III)}$$

弧背求弦

$$\sin a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}(2n-1)!}. \qquad \text{(II)}$$

徐有壬(1800-1860)測圓密率卷二,引作"正弦求弧背"(VII),"正矢求弧背"(VIII),"弧背求正矢"(III),"弧背求正弦"(II).

16. 董祐誠之割圜連比例圖解

董祐誠(字方立,陽湖人,1791-1823)於嘉慶二十四年(1819)撰割圜連比例圖解三卷,其卷上冠以杜氏九術,并立"以弦求弦","以矢求矢",四則,即:

(1)有通弦求通弧加倍幾分之通弦,[凡弦之倍分,皆取奇數],

$$c_m = mc - \frac{m(m^2-1^2)c^3}{4\,\underline{|3}\cdot r^2} + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)c^5}{4^2\cdot\underline{|5}\cdot r^4} - \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{4^3\cdot\underline{|7}\cdot r^6} + \cdots, \qquad \text{(X)}$$

(2)有矢求通弧加倍幾分之矢,[凡矢之倍分,奇耦通用],

$$\text{vers}\, m\, a = m^2(\text{vers}\, a) - \frac{m^2(4m^2-4)2(\text{vers}\, a)^2}{4\cdot 3\cdot 4\cdot r} + \frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)2^2(\text{vers}\, a)^3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2} - \cdots, \qquad \text{(XI)}.$$

(3)有通弦求幾分通弧之一通弦,[此亦取奇數],

$$c_{\frac{1}{m}} = \frac{c}{m} + \frac{(m^2-1)c^3}{4\underline{|3}\cdot m^3 r^2} + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{4^2\cdot\underline{|5}\cdot m^5\cdot r^4} + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{4^3\cdot\underline{|7}\cdot m^7\cdot r^6} + \cdots, \qquad \text{(X)}a.$$

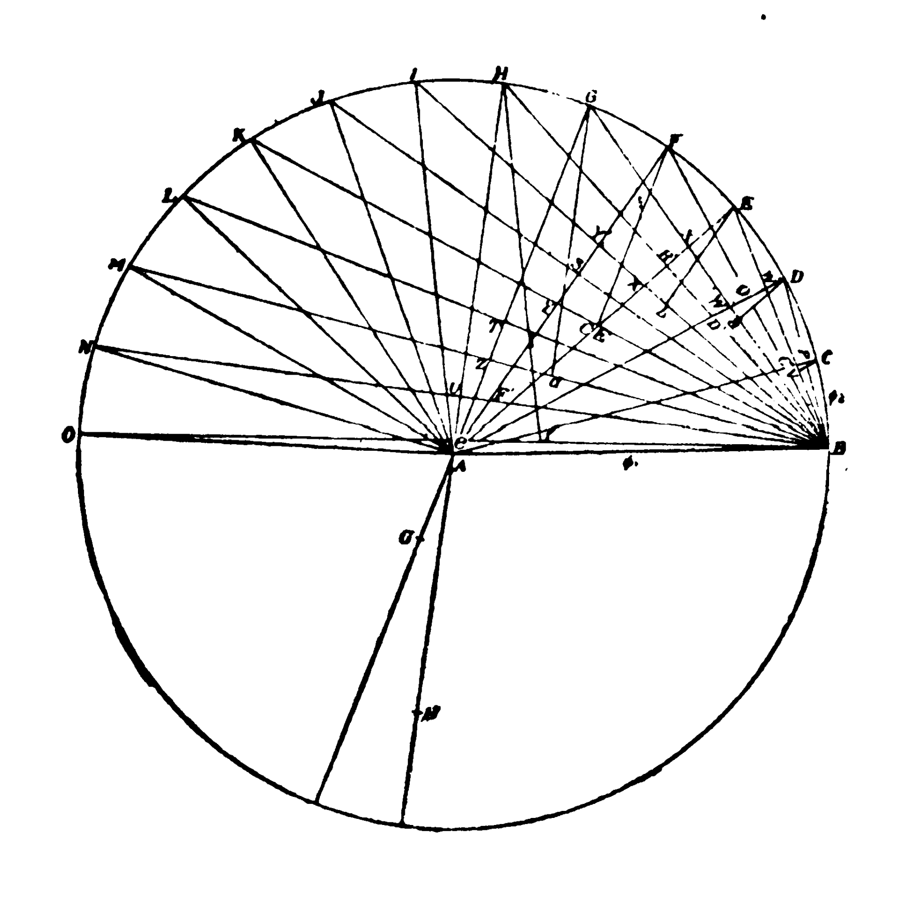
(4)有矢求幾分通弧之一矢,[此亦奇耦通用],

$$\text{vers}\,\frac{1}{m}a=\frac{(\text{vers}\,a)}{m^2}+\frac{(4m^2-4)2(\text{vers}\ a)^2}{4\cdot 3\cdot 4\cdot m^4\cdot r}$$

$$+\frac{(4m^2-4)(4\cdot 4m^2-4)2^2(\text{vers}\ a)^3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot m^6\cdot r^2}+\cdots,$$

(XI)a.

董氏幷稱此四術爲立法之原,杜氏九術,由此推衍而歸於簡易.



第二十九圖

如圖 $AB=r=\phi_1$

BC 弧為一分弧,其弦 BC,$(c_1=\phi_2)$;

BD 弧為二分弧,其矢 CP, $(\text{vers } a=CP)$;

倍矢 CC', $(b_1=2 \text{ vers } a=CC')$;

BE 弧為三分弧,其弦 BE, $(c_3=BE)$;

BF 弧為四分弧,其矢 DQ, $(\text{vers } 2a=DQ)$;

倍矢 DD',$(b_2=2 \text{ vers } a=DD')$;

BG 弧為五分弧,其弦 BG,$(c_5=BG)$;

BH 弧為六分弧,其矢 ER,$(\text{vers } 3a=ER)$;

倍矢 EE',$(b_3=2 \text{ vers } a=EE')$;

BI 弧為七分弧,其弦 BI,$(c_7=BI)$,

BJ 弧為八分弧,其矢 FS,$(\text{vers } 4a=FS)$;

倍矢 FF',$(b_4=2 \text{ vers } a=FF')$;

BK 為九分弧,其弦 BK,$(c_9=BK)$;

BL 為十分弧,其矢 GT,$(\text{vers } 5a=GT)$,

倍矢 GG',$(b_5=2 \text{ vers } 5a=GG')$;

BM 為十一分弧,其弦 BM,$(c_{11}=BM)$;

BN 為十二分弧,其矢 HU,$(\text{vers } 6a=HU)$,

倍矢 HH',$(b_6=2 \text{ vers } 6a=HH')$;

BO 為十三分弧,其弦 BO,$(c_{13}=BO)$;

因 $$AB=\phi_1,\ BC=\phi_2,\ CV//DA,$$

$$AB:BC=BC:CC'$$

即 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3,$$

而 $$CC'=\phi_3=2\text{ vers }a,\ \frac{CC'}{2}=\frac{\phi_3}{2}=\text{vers }a.$$

故一分弧之弦 BC, $c_1=\phi_2$,

二分弧之倍矢 CC', $b_1=\phi_3$

又 $$AB:BC=CC':CV,$$

即 $$\phi_1:\phi_2=\phi_3:\phi_4.$$

故三分弧之弦, $BE=2BC+(BC-C'V)$,

即 $c_3=2\{\phi_2\}+\{\phi_2-\phi_4\},=3\phi_2-\phi_4.$

又 $$BW'=BE-BC=2\phi_2-\phi_4,$$

$$AB:BC=BW':W'W.$$

即 $$\phi_1:\phi_2=(2\phi_2-\phi_4):W'W.$$

$$W'W=2\phi_3-\phi_5$$

$$W'Q=\frac{W'W}{2}=\phi_3-\frac{1}{2}\phi_5.$$

$$DQ=WQ+DW'=W'Q+CC',$$

或 $$\text{vers }4a=2\phi_3-\frac{1}{2}\phi_5.$$

故四分弧之倍矢, $DD'=W'W+2CC'$.

即 $$b_2=\{2\phi_3-\phi_5\}+2\{\phi_3\}=4\phi_3-\phi_5.$$

又 $$AB:BC=DW:Wa,$$

即 $$\phi_1:\phi_2=(3\phi_3-\phi_5):Wa.$$

$$Wa-3\phi_4-\phi_6,\quad X'W'=\phi_2-3\phi_4+\phi_6,$$

$$2BQ=2BD=2(2\phi_2-\phi_4)=4\phi_2-2\phi_4;$$

故五分弧之弦, $$BG=2BQ+X'W'.$$

即 $$c_5=2\{2\phi_2-\phi_4\}+\{\phi_2-3\phi_4+\phi_6\}$$

$$=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6.$$

又 $$BX'=BG-BW'=3\phi_2-4\phi_4+\phi_6,$$

$$AB:BC=BX':X'X.$$

即 $$\phi_1:\phi_2=(3\phi_2-4\phi_4+\phi_6):X'X.$$

$$X'X=3\phi_3-4\phi_5+\phi_7.$$

$$RX'=\frac{X'X}{2}=1\frac{1}{2}\phi_3-2\phi_5+\frac{1}{2}\phi_7.$$

$$ER=RX'+EX'=RX'+DW.$$

或 $$\text{vers}\,6\alpha=4\frac{1}{2}\phi_3-3\phi_5+\frac{1}{2}\phi_7.$$

故六分弧之倍矢, $$EE'=X'X+2DW.$$

即 $$b_3=\{3\phi_3-4\phi_5+\phi_7\}+2\{3\phi_3-\phi_5\}$$

$$=9\phi_3-6\phi_5+\phi_7$$

又 $$EX = EE' - E'X = EE' - DW$$

$$= 6\phi_3 - 5\phi_5 + \phi_7.$$

$$AB : BC = EX : Xb.$$

$$\phi_1 : \phi_2 = (6\phi_3 - 5\phi_5 + \phi_7) : Xb.$$

$$Xb = 6\phi_4 - 5\phi_6 + \phi_8,$$

$$Y'X = EF - Xb = BC - Xb$$

$$= \phi_2 - 6\phi_4 + 5\phi_6 - \phi_8.$$

故七分弧之弦, $BI = 2BX + XY'$

即 $$c_7 = 2\{3\phi_2 - 4\phi_4 + \phi_6\} + \{\phi_2 - 6\phi_4 + 5\phi_6 - \phi_8\}$$

$$= 7\phi_2 - 14\phi_4 + 7\phi_6. - \phi_8$$

又 $$BY' = BI - BX' = 4\phi_2 - 10\phi_4 + 6\phi_6 - \phi_8.$$

$$AB : BC = BY' : Y'Y.$$

$$\phi_1 : \phi_2 = (4\phi_2 - 10\phi_4 + 6\phi_6 - \phi_8) : Y'Y.$$

$$Y'Y = 4\phi_3 - 10\phi_5 + 6\phi_7 - \phi_9$$

故八分弧之倍矢, $FF' = Y'Y + 2EX.$

即 $$b_4 = \{4\phi_3 - 10\phi_5 + 6\phi_7 - \phi_9\} + 2\{6\phi_3 - 5\phi_5 + \phi_7\}$$

$$= 16\phi_3 - 20\phi_5 + 8\phi_7 - \phi_9.$$

....

若按序列之,則因次之關係:

$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots\cdots + 1,$

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n,$$

$$1+3+6+10+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}},$$

$$1+4+10+20+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{\underline{|3}},$$

$$1+5+15+35+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{\underline{|4}},$$

$$1+6+21+56+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{\underline{|5}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$1+3+5+7+9+\cdots\cdots+(2n-1),$$

$$1+4+9+16+25+\cdots\cdots+\frac{n(2n)}{\underline{|2}},$$

$$1+5+14+30+55+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(2n+1)}{\underline{|3}},$$

$$1+6+20+50+105+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{\underline{|4}},$$

$$1+7+27+77+182+378+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{\underline{|5}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故　一分弧之弦　$=\phi_2,$

　　三分弧之弦　$=2\{\phi_2\}+\{\phi_2-\phi_4\},$

五分弧之弦 $=2\{2\phi_2-\phi_4\}+\{\phi_2-3\phi_4+\phi_6\}$,

七分弧之弦 $=2\{3\phi_2-4\phi_4+\phi_6\}$

$+\{\phi_2-6\phi_4+5\phi_6-\phi_8\}$,

九分弧之弦 $=2\{4\phi_2-10\phi_4+6\phi_6-\phi_8\}$

$+\{\phi_2-10\phi_4+15\phi_6-7\phi_8+\phi_{10}\}$,

十一分弧之弦 $=2\{5\phi_2-20\phi_4+21\phi_6-8\phi_8+\phi_{10}\}$

$+\phi_2-15\phi_4+35\phi_6-28\phi_8$

$+9\phi_{10}-\phi_{12}\}$,

十三分弧之弦 $=2\{6\phi_2-35\phi_4+56\phi_6-36\phi_8+10\phi_{10}$

$-\phi_{12}\}+\{\phi_2-21\phi_4+70\phi_6-84\phi_8$

$+45\phi_{10}-11\phi_{12}+\phi_{14}\}$,

十五分弧之弦 $=2\{7\phi_2-56\phi_4+126\phi_6-120\phi_8$

$+55\phi_{10}-12\phi_{12}+\phi_{14}\}+\{\phi_2-28\phi_4$

$+126\phi_6-210\phi_8+165\phi_{10}-66\phi_{12}$

$+13\phi_{14}-\phi_{16}\}$,

十七分弧之弦 $=2\{8\phi_2-84\phi_4+252\phi_6-330\phi_8$

$+220\phi_{10}-78\phi_{12}+14\phi_{14}-\phi_{16}\}$

$+\{\phi_2-36\phi_4+210\phi_6-462\phi_8$

$+495\phi_{10}-286\phi_{12}+91\phi_{14}$

$-15\phi_{16}+\phi_{18}\}$

時,同理可歸納得:

$(2n+1)$分弧之弦

$$=2\left\{n\phi_2-\frac{n(n^2-1^2)}{\lfloor 3}\phi_4+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{\lfloor 5}\phi_6\right.$$

$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{\lfloor 7}\phi_8$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)}{\lfloor 9}\phi_{10}$$

$$\left.-\cdots+(-1)^{n+1}\phi_{2n}\right\}$$

$$+\left\{\phi_2-\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}\phi_4+\frac{n(n^2-1^2)(n+2)}{\lfloor 4}\phi_6\right.$$

$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n+3)}{\lfloor 6}\phi_8$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n+4)}{\lfloor 8}\phi_{10}$$

$$\left.-\cdots+(-1)^n\phi_{2n+2}\right\},$$

或可書:

m分弧之弦,

$$c_m=m\phi_2-\frac{m(m^2-1^2)}{2^2\lfloor 3}\phi_4+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\cdot\lfloor 5}\phi_6$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\cdot\lfloor 7}\phi_8+\cdots, \quad (X)$$

或因 $c_1=\phi_2,$

$$c_3=3\phi_2-\phi_4,$$

$$c_5=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$$

$$c_7=7\phi_2-14\phi_4+7\phi_6-\phi_8,$$

$$c_9=9\phi_2-30\phi_4+27\phi_6-9\phi_8+\phi_{10},$$

$$c_{11}=11\phi_2-55\phi_4+77\phi_6-44\phi_8+11\phi_{10}-\phi_{12},$$

$$c_{13}=13\phi_2-91\phi_4+182\phi_6-156\phi_8+65\phi_{10}-13\phi_{12}+\phi_{14},$$

$$c_{15}=15\phi_2-140\phi_4+378\phi_6-450\phi_8+275\phi_{10}-90\phi_{12}+15\phi_{14}-\phi_{16},$$

$$c_{17}=17\phi_2-204\phi_4+714\phi_6-1122\phi_8+935\phi_{10}-442\phi_{12}+119\phi_{14}-17\phi_{16}+\phi_{18}$$

....

時,同理可歸納得:

$$c_{2n-1}=(2n-1)\phi_2-\frac{(n-1)n((2n-1)}{\lfloor 3}\phi_4$$

$$+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(2n-1)}{\lfloor 5}\phi_6$$

$$-\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(2n-1)}{\lfloor 7}\phi_8$$

$$+\cdots\cdots,$$

或 $$c_m=m\phi_2-\frac{m(m^2-1^2)}{2^2\lfloor 3}\phi_4+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\cdot\lfloor 5}\phi_6$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\cdot\lfloor 7}\phi_8+\cdots\cdots,$$

或 $$c_m=mc-\frac{m(m^2-1^2)c^3}{4\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)c^5}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^4}$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^6}+\cdots,\quad (X).$$

同理，$b_1=\{\phi_3\}$,

$b_2=\{2\phi_3-\phi_5\}+2\{\phi_3\}$,

$b_3=\{3\phi_3-4\phi_5+\phi_7\}+2\{3\phi_3-\phi_5\}$,

$b_4=\{4\phi_3-10\phi_5+6\phi_7-\phi_9\}+2\{6\phi_3-5\phi_5+\phi_7\}$,

$b_5=\{5\phi_3-20\phi_5+21\phi_7-8\phi_9+\phi_{11}\}$

$+2\{10\phi_3-15\phi_5+7\phi_7-\phi_9\}$,

……………………………………………………

$$b_m=\Big\{m\phi_3-\frac{(m-1)m(m+1)}{\lfloor 3}\phi_5$$

$$+\frac{(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)}{\lfloor 5}\phi_7$$

$$-\frac{(m-3)(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)(m+3)}{\lfloor\underline{7}}\phi_9$$

$$+\cdots\cdots\Big\}$$

$$+2\Big\{\frac{(m-1)m}{\lfloor\underline{2}}\phi_3-\frac{(m-2)(m-1)m(m+1)}{\lfloor\underline{4}}\phi_5$$

$$+\frac{(m-3)(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)}{\lfloor\underline{6}}\phi_7$$

$$-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)(m+3)}{\lfloor\underline{8}}\phi_9$$

$$+\cdots\cdots\Big\}$$

$$=\frac{2\cdot\overline{2m}^2}{4\lfloor\underline{2}}\phi_3-\frac{2\cdot\overline{2m}^2(\overline{2m}^2-2^2)}{4^2\cdot\lfloor\underline{4}}\phi_5$$

$$+\frac{2\cdot\overline{2m}^2(\overline{2m}^2-2^2)(\overline{2m}^2-4^2)}{4^3\cdot\lfloor\underline{6}}\phi_7$$

$$-\frac{2\cdot\overline{2m}^2(\overline{2m}^2-2^2)(\overline{2m}^2-4^2)(\overline{2m}^2-6^2)}{4^4\cdot\lfloor\underline{8}}\phi_9+\cdots\cdots,$$

或因　$b_1=\phi_3,$

$b_2=4\phi_3-\phi_5,$

$b_3=9\phi_3-6\phi_5+\phi_7,$

$b_4=16\phi_3-20\phi_5+8\phi_7-\phi_9$

$$b_5 = 25\phi_3 - 50\phi_5 + 35\phi_7 - 10\phi_9 + \phi_{11},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$b_m = m^2\phi_3 - \frac{2m^2(m^2-1^2)}{\lfloor\underline{4}}\phi_5$$

$$+\frac{2m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)}{\lfloor\underline{6}}\phi_7$$

$$-\frac{2m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)(m^2-3^2)}{\lfloor\underline{8}}\phi_9 + \cdots\cdots,$$

或 $$\text{vers } ma = m^2(\text{vers } a) - \frac{m^2(4m^2-4)2(\text{vers } a)^2}{4\cdot 3\cdot 4\, r}$$

$$+\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)2^2(\text{vers } a)^3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2} - \cdots, \quad \text{(XI)}$$

在(X),(XI)二式,如 m 爲極大,則括弧内所減 1, 4, 9, 16, 25, 36,……各數,可不入算.

又以 $$m\phi_2 = 2a,$$

$$\overline{2m}^2\phi_3 = \frac{\overline{2m}^2\phi_2^2}{\phi_1} = \frac{(2a)^2}{r}$$

$$m^3\phi_4 = \frac{m^3\cdot\phi_2\cdot\phi_2\cdot\phi_2}{\phi_1\cdot\phi_1} = \frac{(2a)^3}{r^2};$$

$$\overline{2m}^4\phi_5 = \frac{\overline{2m}^4\phi_2^4}{\phi_1^3} = \frac{\overline{2m\phi_2}^4}{\phi_1^3} = \frac{(2a)^4}{r^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故(X), (XI)二式可化爲(IV), (V), 卽:

$$c=2a-\frac{(2a)^3}{4\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\underline{|5}\cdot r}-\frac{(2a)^7}{4^3\underline{|7}\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

或 $$c=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n+1}}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}(2n-1)!};\qquad\text{(IV)}$$

及 $$\operatorname{vers} a=\frac{(2a)^2}{4\underline{|2}\cdot r}-\frac{(2a)^4}{4^2\underline{|4}\cdot r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\underline{|6}\cdot r^5}-\frac{(2a)^8}{4^4\underline{|8}\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers} a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^n\, r^{2n+1}(2n)!}.\qquad\text{(V)}$$

同理,得 (II), (III).[21]

次由(IV)得(VI), 由(III)得(VIII), 迴求之法,略同明氏解法.此與明氏同以(II), (III), (IV), (V), (VI), (VIII)爲基本;以(IV), (V)又爲基本之基本,故先述之.

項名達稱:「堆積旣與率數合,何以有倍分無析分,倍分中弦率又何以有奇分無偶分,且弦矢線於圜中,與三角堆何與」[22] 於是有象數一原之作,說詳次節.

17. 項名達之象數一原

項名達 (1789–1850) 因董祐誠割圜連比例中所

(21) 以上見割圜連比例圖解卷上,中.

(22) 見象數一原,項名達自序.

論割圜;「堆積既與率數合,何以有倍分無析分,倍分中弦率又何以有奇分無偶分,且弦矢線於圜中,於三角堆何與」蓄是疑有年,丁酉(1837)歸自茗南,舟中偶念此,恍然有悟,先爲圖說二卷.[23] 至丙午冬(1846)復以前稿疎脫甚多,續爲圖解,未成而卒.其友戴煦(1805-1860)爲續成之,共得七卷,是爲象數一原.[24] 其後徐有壬,夏鸞翔皆本項氏之法,其立法之根,實從廉法表遞加之數,悟得其理,與西法之二項例無異,惟當時二項之例;尙未譯出,項氏深思而得之.[25] 計其卷目,則:

卷一(*A*) 整分起度弦矢率論.

卷二(*B*) 半分起度弦矢率論.

卷三(*C*) 零分起度弦矢率論.

卷四(*D*) 零分起度弦矢率論,[原本不全,戴煦補].

卷五(*E*) 諸術通詮.

卷六(*F*) 諸術明變,[原本無加減差表,戴煦補].

卷七 橢圜求周圖解[原本無,戴煦補].

(*A*) 整分起度弦矢率論.

(23) 見象數一原,項名達道光二十三年(1843)自序.

(24) 見象數一原,項名達,道光二十九年(1849)自序.

(25) 見華蘅芳學算筆談卷十二.

如第三十圖 第一形 ABC， 第六形 $BX'X$，

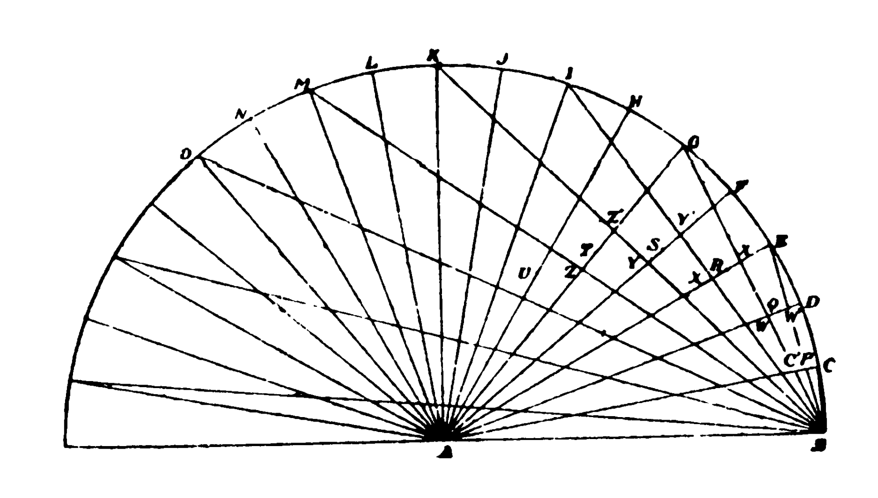
第二形 BCC'， 第七形 AXY'，

第三形 $AC'W'$， 第八形 $BY'Y$，

第四形 $BW'W$， 第九形 AYZ'……，

第五形 AWX'， 第十形 $BZ'Z$，……，

幷爲相似等腰三角形.



第三十圖

令第一形 ABC，腰 $AB=\phi_1$，

第一形 ABC，底
或第二形 BCC' 腰 $\Big\}$ $BC=\phi_2$，

第二形 BCC' 底 $CC'=\phi_3$，

則第三形 $AC'W'$ 腰 $AC'=\phi_1-\phi_3$，卽第一形腰，第二形底相減之數，

第三形 $AC'W'$ 底 $C'W'=\frac{BC}{AB}\times AC'$

$$=\frac{\phi_2}{\phi_1}(\phi_1-\phi_3)=\phi_2-\phi_4,$$

第四形 $BW'W$ 腰 $BW'=BC+C'W'=2\phi_2-\phi_4,$

卽第二形腰,第三形底相加之數,

第四形 $BW'W$ 底 $WW'=\frac{BC}{AB}\times BW'$

$$=\frac{\phi_2}{\phi_1}(2\phi_2-\phi_4)=2\phi_3-\phi_5$$

第五形 AWX' 腰 $AW=AC'-WW'$

$$=(\phi_1-\phi_3)-(2\phi_3-\phi_5)$$

$$=\phi_1-3\phi_3+\phi_5,$$

卽第三形腰,第四形底相減之數,

第五形 AWX' 底 $WX'=\frac{\phi_2}{\phi_1}(\phi_1-\phi_3+\phi_5)=\phi_2-3\phi_4+\phi_6.$

第六形 $BX'X$ 腰 $BX'=BW'+WX'$

$$=(2\phi_2-\phi_4)+(\phi_2-3\phi_4+\phi_6)$$

$$=3\phi_2-4\phi_4+\phi_6,$$

卽第四形腰,第五形底相加之數,

第六形 $BX'X$ 底 $XX' = \frac{\phi_2}{\phi_1}(3\phi_2 - 4\phi_4 + \phi_6)$

$= 3\phi_3 - 4\phi_5 + \phi_7.$

同理,

第七形 AXY' 腰 $AX = \phi_1 - 6\phi_3 + 5\phi_5 - \phi_7,$

第七形 AXY' 底 $XY' = \phi_2 - 6\phi_4 + 5\phi_6 - \phi_8,$

第八形 $BY'Y$ 腰 $BY' = 4\phi_2 - 10\phi_4 + 6\phi_6 - \phi_8,$

第八形 $BY'Y$ 底 $YY' = 4\phi_3 - 10\phi_5 + 6\phi_7 - \phi_9,$

第九形 AYZ' 腰 $AY = \phi_1 - 10\phi_3 + 15\phi_5 - 7\phi_7 + \phi_9,$

第九形 AYZ' 底 $YZ' = \phi_2 - 10\phi_4 + 15\phi_6 - 7\phi_8 + \phi_{10},$

第十形 $BZ'Z$ 腰 $BZ' = 5\phi_2 - 20\phi_4 + 21\phi_6 - 8\phi_8 + \phi_{10},$

第十形 $BZ'Z$ 底 $ZZ' = 5\phi_3 - 20\phi_5 + 21\phi_7 - 8\phi_9 + \phi_{11},$

....

而第 n 形腰 = 第 $n-2$ 形腰,

第 $n-1$ 形底相減之數, $n=$ 奇數,

第 n 形底 $= \frac{\phi_2}{\phi_1}$(第 n 形腰), $n=$ 奇數,

第 m 形腰 = 第 $m-2$ 形腰,

第 $m-1$ 形底相加之數, $m=$ 耦數,

第 m 形底 $= \frac{\phi_2}{\phi_1}$(第 m 形腰) $m=$ 耦數,

故得(a)逐分通弦率,即:

一分通弦　$BC=\phi_2$,

三分通弦　$BE=3\phi_2-\phi_4$,

五分通弦　$BG=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$

七分通弘　$BI=7\phi_2-14\phi_4+7\phi_6-\phi_8$,

九分通弦　$BK=9\phi_2-30\phi_4+27\phi_6-9\phi_8+\phi_{10}$,

十一分通弦 $BM=11\phi_2-55\phi_4+77\phi_6-44\phi_8+11\phi_{10}-\phi_{12}$,

十三分通弦 $BO=13\phi_2-81\phi_4+182\phi_6-156\phi_8+65\phi_{10}-13\phi_{12}+\phi_{14}$,

十五分通弦　$=15\phi_2-140\phi_4+378\phi_6-450\phi_8+275\phi_{10}-40\phi_{12}+15\phi_{14}-\phi_{16}$,

十七分通弦　$=17\phi_2-204\phi_4+714\phi_6-1122\phi_8+935\phi_{10}-442\phi_{12}+119\phi_{14}-17\phi_{16}+\phi_{18}$,

而　n分通弦　$=$第$n-1$形腰,及第$n+1$形腰相加之數,而$n=$奇數,

(b)逐分倍矢率.

命第三,五,……形腰較,爲第三,五,……形腰與半徑之較.

一分倍矢$2CP=\phi_3$，即第三形腰較，

二分倍矢$2DQ=4\phi_3-\phi_5$，即第三，五形腰較和，

三分倍矢$2ER=9\phi_3-6\phi_5+\phi_7$即五，七形腰較和，

四分倍矢$2FS=16\phi_3-20\phi_5+8\phi_7-\phi_9$，即七，九形腰較和，

五分倍矢$2GT=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}$，即九，十一形腰較和，

六分倍矢$2HU=36\phi_3-105\phi_5+112\phi_7-54\phi_9+12\phi_{11}-\phi_{13}$，即十一，十三形腰較和，

七分倍矢　$=49\phi_3-196\phi_5+296\phi_7-210\phi_9+77\phi_{11}-14\phi_{13}+\phi_{15}$，即十三，十五形腰較和，

八分倍矢　$=64\phi_3-336\phi_5+672\phi_7-660\phi_9+352\phi_{11}-104\phi_{13}+16\phi_{15}-\phi_{17}$，即第十五，十七形腰較之和，

而m分倍矢　＝第$2m-1$形腰較，及第$2m+1$形腰較相加之數。

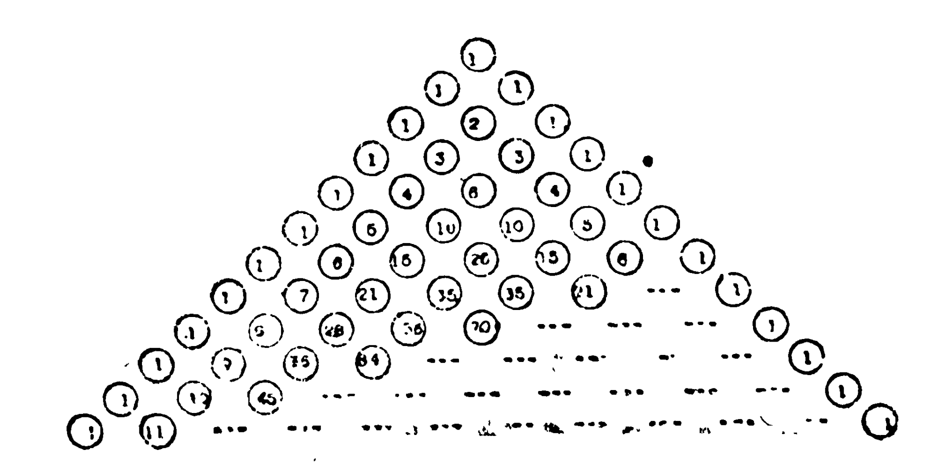
既知n分通弦第$n-1$形腰，及第$n+1$腰相加之數；又m分倍矢爲第$2m-1$形腰較，及第$2m+1$腰較相加之數，而各形腰，及各形腰較，與各率之關係，又可以次之"遞加圖"示之，即：

十一乘積，其積即董氏之十二乘三角堆積，
十乘積，其積即董氏之十一乘三角堆積，
九乘積，其積即董氏之十乘三角堆積，
八乘積，其積即董氏之九乘三角堆積，
七乘積，其積即董氏之八乘三角堆積，
六乘積，其積即董氏之七乘三角堆積，
五乘積，其積即董氏之六乘三角堆積，
四乘積，其積即董氏之五乘三角堆積，
三乘積，其積即董氏之四乘三角堆積，
立積，其積即董氏之三乘三角堆積，
平積，其積即董氏之立三角堆積，
根，其積即董氏之平三角堆積，

第十三形腰較
第十二形腰
第十一形腰較
第十形腰
第九形腰較
第八形腰
第七形腰較
第六形腰
第五形腰較
第四形腰
第三形腰較
第二形腰

ϕ_2 1 2 3 4 5 6
ϕ_3 1 3 6 10 15 21
ϕ_4 1 4 10 20 35
ϕ_5 1 5 15 35 70
ϕ_6 1 6 21 56
ϕ_7 1 7 28 84
ϕ_8 1 8 36
ϕ_9 1 9 45
ϕ_{10} 1 10
ϕ_{11} 1 11
ϕ_{12} 1
ϕ_{13} 1

此卽巴氏三角形(Pascal's triangle)斜視之圖.在國中則楊輝詳解九章算法(1261),朱世傑四元玉鑑(1303)已首論之.其圖如次:



因二項式定理之最簡式:

$$(1+1)^n=1+n\cdot1+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cdot1^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\cdot1^3$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}\cdot1^4+\cdots\cdots+1^n,$$

$=1+n\cdot1+$(平三角堆積)+(立三角堆積)

+(三乘三角堆積)$+\cdots\cdots+1^n$.

故項名達求腰率法曰:形數($2n$)折半爲根,卽爲二率(之係數,如第八形腰,爲$\frac{8}{2}\phi_2=4\phi_2$,第十形腰,爲$\frac{10}{2}\phi_2=5\phi_2\cdots\cdots$,第$2n$形腰爲$n\phi_2$是也).根自乘減一,以

乘二率,二除之,三除之,得四率(之係數,如第八形腰,爲 $\frac{4(4^2-1)}{2\cdot 3}\phi_4=10\phi_4$,第十形腰爲 $\frac{5(5^2-1)}{2\cdot 3}\phi_4=20\phi_4,\cdots\cdots$,第 $2n$ 形腰,爲 $\frac{n(n^2-1)}{\lfloor 3}\phi_4$ 是也).根自乘減四,以乘四率,四除之,五除之,得六率(之係數,如第八形腰,爲 $\frac{10(4^2-4)}{4\cdot 5}\phi_6=6\phi_6$,第十形腰爲 $\frac{20(5^2-4)}{4\cdot 5}\phi_6=21\phi_6,\cdots\cdots$,第 $2n$ 形腰爲 $\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{\lfloor 5}\phi_6$ 是也).根自乘減九,以乘六率,六除之,七除之,得八率(之係數,如第八形腰爲 $\frac{6(4^2-9)}{6\cdot 7}\phi_8=\phi_8$,第十形腰爲 $\frac{21(5^2-9)}{6\cdot 7}\phi_8=8\phi_8,\cdots\cdots$,第 $2n$ 形腰,爲 $\frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{\lfloor 7}\phi_8$ 是也.二率爲正,四率爲負,以下皆正負相間,凡乘法恆以1, 2, 3, 4等數自乘之,與根自乘相減.若相減適盡,則已得末率,不必再求.(如第八形腰之 $\frac{6(4^2-9)}{6\cdot 7}\phi_8=\phi_8$ 是也).

因 $2n+1$ 分弧通弦 = 第 $2n$ 形腰 + 第 $2(n+1)$ 形腰,

$$=\left\{n\phi_2+\frac{n(n^2-1)}{\lfloor 3}\phi_4+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{\lfloor 5}\phi_6\right.$$

$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{\lfloor 7}\phi_8+\cdots\cdots\Big\}$$

$$+\Big\{\overline{n+1}\phi_2-\frac{(n+1)\{\overline{n+1}^2-1\}}{\lfloor 3}\phi_4$$

$$+\frac{(n+1)\{\overline{n+1}^2-1\}\{\overline{n+1}^2-2^2\}}{\lfloor 5}\phi_6$$

$$-\frac{(n+1)\{\overline{n+1}^2-1\}\{\overline{n+1}^2-2^2\}\{\overline{n+1}^2-3^2\}}{\lfloor 7}\phi_8$$

$$+\cdots\cdots\Big\}$$

令 $2n+1=m$, 則「倍分通弦」中, m 分弧之弦,

$$C_m=m\phi_2-\frac{m(m^2-1^2)}{2^2\cdot\lfloor 3}\phi_4+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\cdot\lfloor 5}\phi_6$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\cdot\lfloor 7}\phi_8+\cdots\cdots. \qquad (X)$$

又求腰較率法曰: 形數($2m$)爲倍根,倍根自乘減一,四除之,二除之,爲三率(之係數,如第七形腰較,爲 $\frac{(7^2-1)}{4\cdot 2}\phi_3=6\phi_3$,第九形腰較,爲 $\frac{(9^2-1)}{4\cdot 2}\phi_3=10\phi_3,\cdots\cdots$, 第 $2m$ 形腰較,爲 $\frac{(2m^2-1^2)}{4\cdot 2}\phi_3$ 是也).倍根自乘減九,以乘三率,四除之,三除之,四除之,得五率(之係數,如第七

形腰較,爲 $\frac{6(7^2-3^2)}{4\cdot3\cdot4}\phi_5=5\phi_5$,第九形腰較,爲 $\frac{10(9^2-3^2)}{4\cdot3\cdot4}\phi_5$

$=15\phi_5$,……,第 $2m$ 形腰較,爲 $\frac{(\overline{2m}^2-1^2)(\overline{2m}^2-3^2)}{4^2\cdot\lfloor\underline{4}}\phi_5$ 是也).

倍根自乘減二十五,以乘五率,四除之,五除之,六除之得七率(之係數,如第七形腰較,爲 $\frac{5(7^2-5^2)}{4\cdot5\cdot6}\phi_5=\phi_5$,第九形腰較,爲 $\frac{15(9^2-5^2)}{4\cdot5\cdot6}\phi_5=7\phi_5$,……,第 $2m$ 形腰較,爲

$\frac{(\overline{2m}^2-1^2)(\overline{2m}^2-3^2)(\overline{2m}^2-5^2)}{4^3\lfloor\underline{6}}\phi_7$ 是也).三率爲正,五率爲負,以下皆正負相間,凡乘法恆以1,3,5,7等數自乘之,與倍根自乘相減,若相減適盡,則已得末率,不必再求.(如第七形腰較之 $\frac{5(7^2-5^2)}{4\cdot5\cdot6}\phi_5=\phi_5$ 是也).

因 m 分倍矢 = 第 $2m-1$ 形腰較 + 第 $2m+1$ 形腰較.

$$=\Big\{\frac{(\overline{2m-1}^2-1^2)}{4\cdot\lfloor\underline{2}}\phi_3-\frac{(\overline{2m-1}^2-1^2)(\overline{2m-1}^2-3^2)}{4^2\lfloor\underline{4}}\phi_5$$

$$+\frac{(\overline{2m-1}^2-1^2)(\overline{2m-1}^2-3^2)(\overline{2m-1}^2-5^2)}{4^3\cdot\lfloor\underline{6}}\phi_7$$

$$-\frac{(\overline{2m-1}^2-1^2)(\overline{2m-1}^2-3^2)(\overline{2m-1}^2-5^2)(\overline{2m-1}^2-7^2)}{4^4\cdot\lfloor 8}\phi_9+\cdots\cdots\Big\}$$

$$+\Big\{\frac{(\overline{2m+1}^2-1^2)}{4\lfloor 2}\phi_3-\frac{(\overline{2m+1}^2-1^2)(\overline{2m+1}^2-3^2)}{4^2\cdot\lfloor 4}\phi_5$$

$$+\frac{(\overline{2m+1}^2-1^2)(\overline{2m+1}^2-3^2)(\overline{2m+1}^2-5^2)}{4^3\cdot\lfloor 6}\phi_7$$

$$+\frac{(\overline{2m+1}^2-1^2)(\overline{2m+1}^2-3^2)(\overline{2m+1}^2-5^2)(\overline{2m+1}^2-7^2)}{4^4\cdot\lfloor 8}\phi_9-\cdots\cdots\Big\}.$$

則"倍分倍矢"中，m 分弧之倍矢，

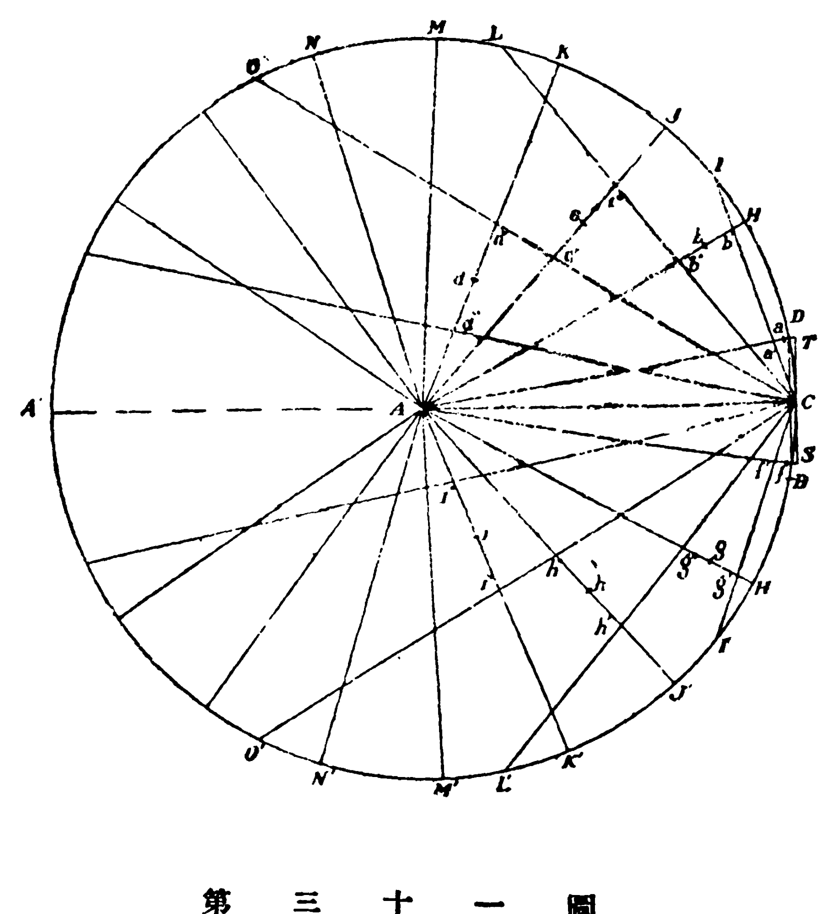
$$b_m=\frac{2(2m)^2}{4\lfloor 2}\phi_3-\frac{2(2m)^2(\overline{2m}^2-2^2)}{4^2\lfloor 4}\phi_5+\frac{2(2m)^2(\overline{2m}^2-2^2)(\overline{2m}^2-4^2)}{4^3\lfloor 6}\phi_7$$

$$-\frac{2(2m)^2(\overline{2m}^2-2^2)(\overline{2m}^2-4^2)(\overline{2m}^2-6^2)}{4^4\cdot\lfloor 8}\phi_9+\cdots\cdots,$$

$$=m^2\phi_3-\frac{m^2(m^2-1)}{3\cdot 4}\phi_5+\frac{m^2(m^2-1)(m^2-2^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\phi_7-\frac{m^2(m^2-1)(m^2-2^2)(m^2-3^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\phi_9+\cdots,\quad\text{(XI)}$$

以上，見項名達象數一原卷一.

(*B*) 半分起度弦矢率論.



第三十一圖

如第三十一圖 BD 爲本弧.

AB, AD 爲半徑, BD 爲通弦, 成 ABD 兩等邊三角形.

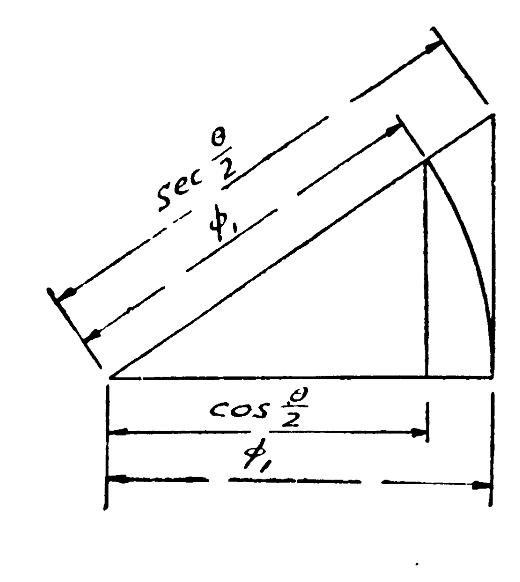
因半分起度, 將全弧折半於 C, 則 BC, CD 皆半弧.

自 C 作 BD 之平行線, 交 AB, AD 之引長線於 S, T.

又聯 $CI, CL, CO, \cdots\cdots$ 等線,得:

第一形, AST,	第六形, $Cc'c''$,
第二形, CTa',	第七形, $Ac''d'$,
第三形, $Aa'b'$	第八形, $Cd'd''$
第四形, $Cb'b''$	…………………
第五形, $Ab''c'$	…………………

幷爲相似等腰三角形.



第三十二圖

因 $r=\phi_1,\ 2\sin\dfrac{\theta}{2}=\phi_2,$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\phi_2}{2},$$

故 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\left(\phi_1^2-\dfrac{\phi_2^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

按商除法或二項式定理,得

$$\cos\frac{\theta}{2}=\left(\phi_1^2-\frac{\phi_2^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\phi_1-\frac{1}{2^3}\phi_3-\frac{1}{2^7}\phi_5-\frac{2}{2^{11}}\phi_7-\frac{5}{2^{15}}\phi_9-\frac{14}{2^{19}}\phi_{11}$$

$$-\frac{42}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{132}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

又因 $\dfrac{\sec\dfrac{\theta}{2}}{\phi_1}=\dfrac{\phi_1}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$, $\sec\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\phi_1^2}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$,

即
$$\sec\frac{\theta}{2}=\phi_1^2\Big(\phi_1-\frac{1}{2^3}\phi_3-\frac{1}{2^7}\phi_5-\frac{2}{2^{11}}\phi_7-\frac{5}{2^{15}}\phi_9$$
$$-\frac{14}{2^{19}}\phi_{11}-\frac{42}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{132}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots\Big)^{-1}$$
$$=\phi_1+\frac{1}{2^3}\phi_3+\frac{3}{2^7}\phi_5+\frac{10}{2^{11}}\phi_7+\frac{35}{2^{15}}\phi_9+\frac{126}{2^{19}}\phi_{11}$$
$$+\frac{462}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{1716}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots.$$

故得遞求半分起度各形腰底率,即

a_1, 第一形 AST 腰 AS
$$=\phi_1+\frac{1}{2^3}\phi_3+\frac{3}{2^7}\phi_5+\frac{10}{2^{11}}\phi_7+\frac{35}{2^{15}}\phi_9$$
$$+\frac{126}{2^{19}}\phi_{11}+\frac{462}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{1716}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$\dfrac{\phi_2}{\phi_1}a_1=\beta_1$, 第一形 AST 底 ST
$$=\phi_2+\frac{1}{2^3}\phi_4+\frac{3}{2^7}\phi_6+\frac{10}{2^{11}}\phi_8+\frac{35}{2^{15}}\phi_{10}$$
$$+\frac{126}{2^{19}}\phi_{12}+\frac{462}{2^{23}}\phi_{14}+\frac{1716}{2^{27}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\beta_1}{2}=\alpha_2$，第二形 CTa' 腰 CT

$$=\frac{1}{2}\phi_2+\frac{1}{2^4}\phi_4+\frac{3}{2^8}\phi_6+\frac{10}{2^{12}}\phi_8+\frac{35}{2^{16}}\phi_{10}$$

$$+\frac{126}{2^{20}}\phi_{12}+\frac{462}{2^{24}}\phi_{14}+\frac{1716}{2^{28}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_2=\beta_2$，第二形 CTa' 底 Ta'

$$=\frac{1}{2}\phi_3+\frac{1}{2^4}\phi_5+\frac{3}{2^8}\phi_7+\frac{10}{2^{12}}\phi_9+\frac{35}{2^{16}}\phi_{11}$$

$$+\frac{126}{2^{20}}\phi_{13}+\frac{462}{2^{24}}\phi_{15}+\cdots\cdots;$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$，第三形 $Aa'b'$ 腰 Aa'

$$=\phi_1-\frac{3}{2^3}\phi_3-\frac{5}{2^7}\phi_5-\frac{14}{2^{11}}\phi_7-\frac{45}{2^{15}}\phi_9$$

$$-\frac{154}{2^{17}}\phi_{11}-\frac{546}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{1980}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_3=\beta_3$，第三形 $Aa'b'$ 底 $a'b'$

$$=\phi_2-\frac{3}{2^3}\phi_4-\frac{5}{2^7}\phi_6-\frac{14}{2^{11}}\phi_8-\frac{45}{2^{15}}\phi_{10}$$

$$-\frac{154}{2^{17}}\phi_{12}-\frac{546}{2^{23}}\phi_{14}-\frac{1980}{2^{27}}\phi_{16}-\cdots\cdots;$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$，第四形 $Cb'b''$ 腰 Cb'

$$=\frac{3}{2}\phi_2-\frac{5}{2^4}\phi_4-\frac{7}{2^8}\phi_6-\frac{18}{2^{12}}\phi_8-\frac{55}{2^{16}}\phi_{10}$$

$$-\frac{182}{2^{20}}\phi_{12}-\frac{630}{2^{24}}\phi_{14}-\frac{2244}{2^{28}}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_4=\beta_4$，第四形 $Cb'b''$ 底 $b'b''$

$$\frac{3}{2}\phi_3-\frac{5}{2^4}\phi_5-\frac{7}{2^8}\phi_7-\frac{18}{2^{12}}\phi_9-\frac{55}{2^{16}}\phi_{11}$$

$$-\frac{182}{2^{20}}\phi_{13}-\frac{630}{2^{24}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5$，第五形 $Ab''c'$ 腰 Ab''

$$=\phi_1-\frac{15}{2^3}\phi_3+\frac{35}{2^7}\phi_5+\frac{42}{2^{11}}\phi_7+\frac{99}{2^{15}}\phi_9+\frac{286}{2^{19}}\phi_{11}$$

$$+\frac{910}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{3060}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_5=\beta_5$，第五形 $Ab''c'$ 底 $b''c'$

$$=\phi_2-\frac{15}{2^3}\phi_4+\frac{35}{2^7}\phi_6+\frac{42}{2^{11}}\phi_8+\frac{99}{2^{15}}\phi_{10}+\frac{286}{2^{19}}\phi_{12}$$

$$+\frac{910}{2^{23}}\phi_{14}+\frac{3060}{2^{27}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$\alpha_4+\beta_5=\alpha_6$，第六形 $Cc'c''$ 腰 Cc'

$$=\frac{5}{2}\phi_2-\frac{35}{2^4}\phi_4+\frac{63}{2^8}\phi_6+\frac{66}{2^{12}}\phi_8+\frac{143}{2^{16}}\phi_{10}$$

$$+\frac{390}{2^{20}}\phi_{12}+\frac{1190}{2^{24}}\phi_{14}+\frac{3876}{2^{28}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_6=\beta_6$，第六形 $Cc'c''$ 底 $c'c''$

$$=\frac{5}{2}\phi_3-\frac{35}{2^4}\phi_5+\frac{63}{2^8}\phi_7+\frac{66}{2^{12}}\phi_9+\frac{143}{2^{16}}\phi_{11}$$

$$+\frac{390}{2^{20}}\phi_{13}+\frac{1190}{2^{24}}\phi_{15}+\cdots\cdots;$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$，第七形 $Ac''d'$ 腰 Ac''

$$=\phi_1-\frac{35}{2^3}\phi_3+\frac{315}{2^7}\phi_5-\frac{462}{2^{11}}\phi_7-\frac{429}{2^{15}}\phi_9-\frac{858}{2^{19}}\phi_{11}$$

$$-\frac{2210}{2^{28}}\phi_{13}-\frac{6460}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_7=\beta_7$，第七形 $Ac''d'$ 底 $c''d'$

$$=\phi_2-\frac{35}{2^3}\phi_4+\frac{315}{2^7}\phi_6-\frac{462}{2^{11}}\phi_8-\frac{429}{2^{15}}\phi_{10}-\frac{858}{2^{19}}\phi_{12}$$

$$-\frac{2210}{2^{28}}\phi_{14}-\frac{6460}{2^{27}}\phi_{16}-\cdots\cdots;$$

$\alpha_6+\beta_7=\alpha_8$，第八形 $Cd'd''$ 腰 Cd'

$$=\frac{7}{2}\phi_2-\frac{105}{2^4}\phi_4+\frac{693}{2^8}\phi_6-\frac{858}{2^{12}}\phi_8-\frac{715}{2^{16}}\phi_{10}$$

$$-\frac{1326}{2^{20}}\phi_{12}-\frac{3230}{2^{24}}\phi_{14}-\frac{9044}{2^{28}}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_8=\beta_8$，第八形 $Cd'd''$ 底 $d'd''$

$$=\frac{7}{2}\phi_3-\frac{105}{2^4}\phi_5+\frac{693}{2^8}\phi_7-\frac{858}{2^{12}}\phi_9-\frac{715}{2^{16}}\phi_{11}$$

$$-\frac{1326}{2^{20}}\phi_{13}-\frac{3230}{2^{24}}\phi_{15}-\cdots\cdots;$$

$\alpha_7-\beta_8=\alpha_9$，第九形腰

$$=\phi_1-\frac{63}{2^3}\phi_3+\frac{1155}{2^7}\phi_5-\frac{6006}{2^{11}}\phi_7+\frac{6435}{2^{15}}\phi_9$$

$$+\frac{4862}{2^{19}}\phi_{11}+\frac{8398}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{19380}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_9=\beta_9$，第九形底

$$=\phi_2-\frac{63}{2^3}\phi_4+\frac{1155}{2^7}\phi_6-\frac{6006}{2^{11}}\phi_8+\frac{6435}{2^{15}}\phi_{10}$$

$$+\frac{4862}{2^{19}}\phi_{12}+\frac{8398}{2^{23}}\phi_{14}+\frac{19380}{2^{27}}\phi_{16}+\cdots\cdots;$$

$\alpha_8+\beta_9=\alpha_{10}$，第十形腰

$$=\frac{9}{2}\phi_1-\frac{231}{2^4}\phi_4+\frac{3003}{2^8}\phi_6-\frac{12870}{2^{12}}\phi_8$$

$$+\frac{12155}{2^{16}}\phi_{10}+\frac{8398}{2^{20}}\phi_{12}+\frac{13566}{2^{24}}\phi_{14}$$

$$+\frac{29716}{2^{28}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_{10}=\beta_{10}$，第十形底

$$=\frac{9}{2}\phi_3-\frac{231}{2^4}\phi_5+\frac{3003}{2^8}\phi_7-\frac{12870}{2^{12}}\phi_9$$

$$+\frac{12155}{2^{16}}\phi_{11}+\frac{8398}{2^{20}}\phi_{13}+\frac{13566}{2^{24}}\phi_{15}+\cdots\cdots;$$

故　　σ_{n+1}，第 $n+1$ 形腰

$$=\frac{n}{\underline{|2}}\phi_2-\frac{n(n^2-2^2)}{2^3\,\underline{|3}}\phi_4+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2^5\cdot\underline{|5}}\phi_6$$

$$-\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2^7\cdot\underline{|7}}\phi_8$$

$$+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{2^9\,\underline{|9}}\phi_{10}$$

$$-\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)(n^2-10^2)}{2^{11}\,\underline{|11}}\phi_{12}$$

$$+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)(n^2-10^2)(n^2-12^2)}{2^{18}\underline{|13}}\phi_{14}$$

$$-\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)(n^2-10^2)(n^2-12^2)(n^2-14^2)}{2^{15}\underline{|15}}\phi_{16}$$

$+\cdots\cdots,$ 而 n 爲奇數;

又 a_{m+1},第 $m+1$ 形腰

$$=\phi_1-\frac{(m^2-1^2)}{2^2\underline{|2}}\phi_3+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\underline{|4}}\phi_5-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\underline{|6}}\phi_7$$

$$+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)}{2^8\underline{|8}}\phi_9-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)(m^2-9^2)}{2^{10}\underline{|10}}\phi_{11}$$

$$+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)(m^2-9^2)(m^2-11^2)}{2^{12}\underline{|12}}\phi_{13}$$

$$-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)(m^2-9^2)(m^2-11^2)(m^2-13^2)}{2^{14}\underline{|14}}\phi_{15}$$

$+\cdots\cdots,$ 而 m 爲耦數.

故得:

a_2+a_4，二分通弦，

$$CI=2\phi_2-\frac{1}{2^2}\phi_4-\frac{1}{2^6}\phi_6-\frac{2}{2^{10}}\phi_8-\frac{5}{2^{14}}\phi_{10}-\frac{14}{2^{18}}\phi_{12}$$

$$-\frac{42}{2^{22}}\phi_{14}-\frac{132}{2^{26}}\phi_{16}\cdots\cdots,$$

a_4+a_6，四分通弦，

$$CL=4\phi_2-\frac{10}{2^2}\phi_4+\frac{14}{2^6}\phi_6+\frac{12}{2^{10}}\phi_8+\frac{22}{2^{14}}\phi_{10}+\frac{52}{2^{18}}\phi_{12}$$

$$+\frac{140}{2^{22}}\phi_{14}+\frac{408}{2^{26}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

a_6+a_8，六分通弦，

$$CO=6\phi_2-\frac{35}{2^2}\phi_4+\frac{189}{2^6}\phi_6-\frac{189}{2^{10}}\phi_8-\frac{143}{2^{14}}\phi_{10}-\frac{234}{2^{18}}\phi_{12}$$

$$-\frac{510}{2^{22}}\phi_{14}-\frac{1292}{2^{26}}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

a_8+a_{10}，八分通弦

$$=8\phi_2-\frac{84}{2^2}\phi_4+\frac{924}{2^6}\phi_6-\frac{3432}{2^{10}}\phi_8+\frac{2860}{2^{14}}\phi_{10}+\frac{1768}{2^{18}}\phi_{12}$$

$$-\frac{2584}{2^{22}}\phi_{14}+\frac{5168}{2^{26}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

而 m 分通弦，

$$C_m = m\phi_2 - \frac{m(m^2-1^2)}{2^2\underline{|3}}\phi_4 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\underline{|5}}\phi_6$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\underline{|7}}\phi_8 + \cdots\cdots, \qquad \text{(X)}$$

$2\phi_1 - a_1 - a_3$，$\frac{1}{2}$ 分倍矢，$2aD = a'D - DT$

$$= \frac{1}{2^2}\phi_3 + \frac{1}{2^6}\phi_5 + \frac{2}{2^{10}}\phi_7 + \frac{5}{2^{14}}\phi_9 + \frac{14}{2^{18}}\phi_{11} + \frac{42}{2^{22}}\phi_{13}$$

$$+\frac{132}{2^{26}}\phi_{15},$$

$2\phi_1 - a_3 - a_5$，$1\frac{1}{2}$ 分倍矢，$2bH = b'H + b''H$

$$= \frac{9}{2^2}\phi_3 - \frac{15}{2^6}\phi_5 - \frac{14}{2^{10}}\phi_7 - \frac{27}{2^{14}}\phi_9 - \frac{66}{7^{18}}\phi_{11} - \frac{182}{2^{22}}\phi_{13}$$

$$-\frac{540}{2^{26}}\phi_{15},$$

$2\phi_1 - a_5 - a_7$，$2\frac{1}{2}$ 分倍矢，$2cJ = c'J + c''J$

$$= \frac{25}{2^2}\phi_3 - \frac{175}{2^6}\phi_5 + \frac{210}{2^{10}}\phi_7 + \frac{165}{2^{14}}\phi_9 + \frac{286}{2^{18}}\phi_{11} + \frac{65}{2^{22}}\phi_{13}$$

$$+\frac{1700}{2^{26}}\phi_{15},$$

$2\phi_1 - a_7 - a_9$，$3\frac{1}{2}$ 分倍矢，$2dK = d'K + d''K$

$$=\frac{49}{2^2}\phi_3-\frac{735}{2^6}\phi_5+\frac{3234}{2^{10}}\phi_7-\frac{3003}{2^{14}}\phi_9-\frac{2002}{2^{18}}\phi_{11}$$

$$-\frac{3094}{2^{22}}\phi_{13}-\frac{6460}{2^{26}}\phi_{15},$$

而 $\frac{n}{m}$ 分倍矢,

$$b_{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{3\cdot4}\phi_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\phi_7$$

$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\phi_9$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XI)}$$

以上見項名達象數一原卷二.

項氏旣於象數一原卷一,如董祐誠之例,由 1, 3, 5, 7,……,等分弧弦歸納得(X)式,又於象數一原卷二,由 2, 4, 6, 8,……, 等分弧弦歸納得(X)式.則董氏所謂"凡弦之倍分,皆取奇數"者,玆知其可以奇耦通用矣.董氏之(XI)式,項氏之(XI)式,并以整數立論,象數一

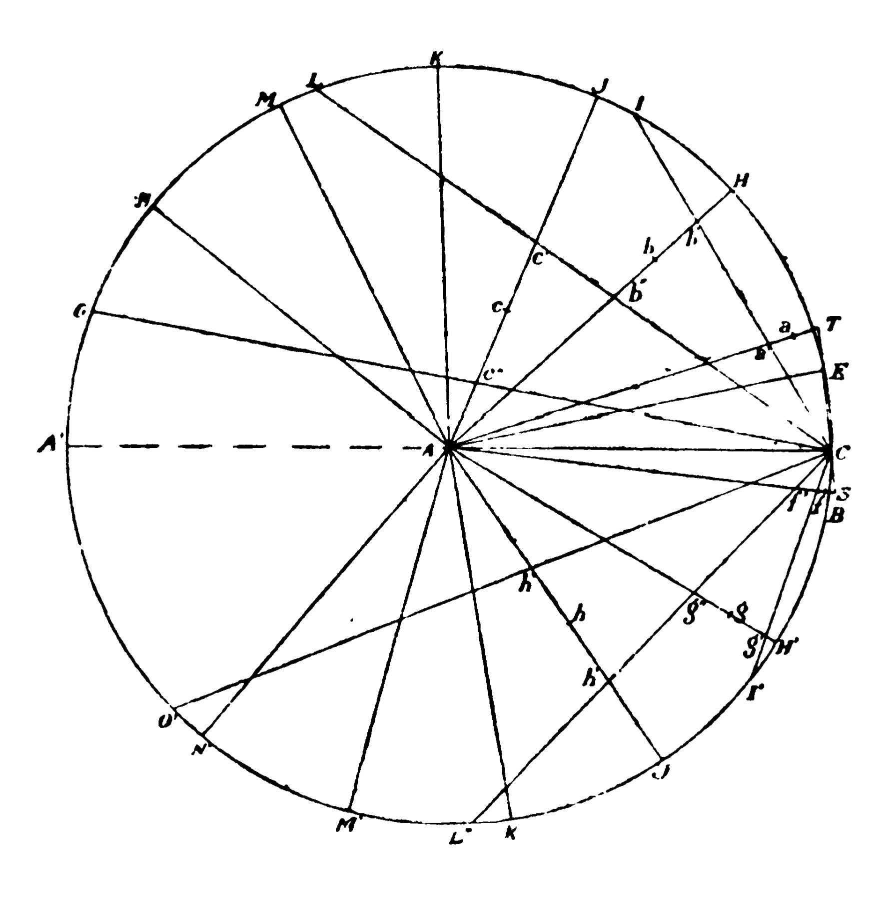
原卷二,三,則設法用分數證$C_{\frac{n}{m}}$,$b_{\frac{n}{m}}$視董氏之僅證$C_{\frac{1}{m}}$ $b_{\frac{1}{m}}$者,亦有進也.

* * *

(C) 零分起度弦矢率論.

前節求 $b_{\frac{n}{m}}$ 以 $\frac{n}{m}=\frac{n}{2}$,茲再以 $\frac{n}{m}=\frac{n}{3}$, $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{5}$

證 $C_{\frac{n}{m}}$, $b_{\frac{n}{m}}$.



第三十三圖

$\left(\text{第一：}\quad \text{令}\ \frac{n}{m}=\frac{n}{3}\right)$.

如第三十三圖 BE 爲本弧,三分爲 BC, CD, DE, 作 CD 弦引出圓外,交 AB, AE 之引長線於 S, T. 則 $\triangle_s\ AST$, ABE 爲相似三角形.又作 CI, CL, CO 各線爲 $\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, \frac{19}{3}$ 弧通弦.

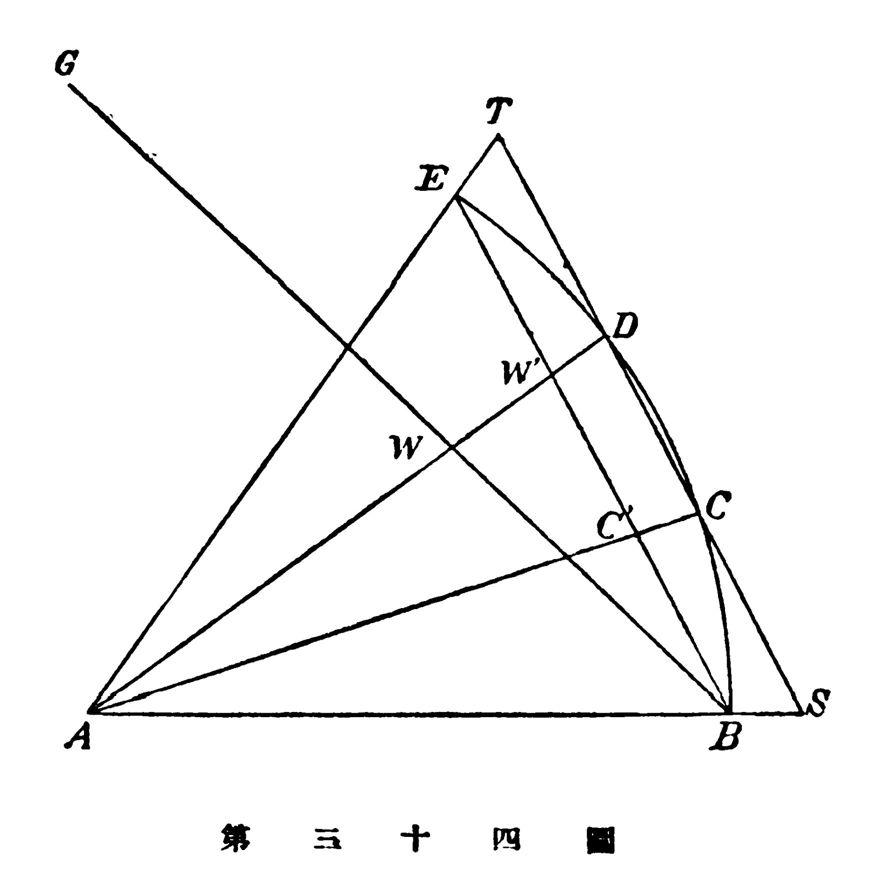
$\frac{n}{3}$ 分弧起度,可分爲 $\frac{2}{3}$ 分弧起度,及 $\frac{1}{3}$ 分弧起度之二例.

前者以 $A'AC$ 線上半圓起算,有:

負第一形	CSf'	第五形	$Ab''c'$
第一形	AST	第六形	$Cc'c''$
第二形	CTa'	第七形	
第三形	$Aa'b'$	第八形	
第四形	$Cb'b''$	……………………	

後者以 $A'AC$ 線下半圓起算,有:

負第二形	CTa'	第五形	$Ag''h'$
第一形	AST	第六形	$Ch'h''$
第二形	CSf'	第七形	
第三形	$Af'g'$	第八形	
第四形	$Cg'g''$	……………………	



第三十四圖

次用"借率法",俾可借前所得者,以御新形:

因 $$AS=\frac{AC\times AB}{AC'}=\frac{r\cdot r}{\phi_1-\phi_3},$$

而 AC' 爲前整分起度内之第三形腰.故

第一形 AST 腰, $$AS=\frac{\phi_2}{\phi_1-\phi_3}$$

$$=\phi_1+\phi_3+\phi_5+\phi_7+\phi_9+\phi_{11}+\phi_{13}+\phi_{15}.$$

又因 $$CS=\frac{AC\times BC'}{AC'}=\frac{AC\times BC}{AC'}=\frac{\phi_1\cdot\phi_2}{\phi_1-\phi_3},$$

而 BC 爲前整分起度內之第二形腰.參觀第三十圖及第三十四圖,故

第二形 CSf' 腰 $CS=\dfrac{\phi_1\cdot\phi_2}{\phi_1-\phi_3}$

$$=\phi_2+\phi_4+\phi_6+\phi_8+\phi_{10}+\phi_{12}+\phi_{14}+\phi_{16}.$$

又因 $$CT=\frac{AC\times C'E}{AC'}=\frac{AC\times BW'}{AC'}=\frac{\phi_1(2\phi_2-\phi_4)}{\phi_1-\phi_3},$$

而 BW',卽前整分起度內之第四形腰.故

又第二形 CTa 腰 $CT=\dfrac{\phi_1(2\phi_2-\phi_4)}{\phi_1-\phi_3}$

$$=2\phi_2+\phi_4+\phi_6+\phi_8+\phi_{10}+\phi_{12}+\phi_{14}+\phi_{16}.$$

復次用"易率法":

因 $c_3=3\phi_2-\phi_4$

今 $\phi'_1=\phi_1,\ \phi'_2=c_3.$

卽 $\dfrac{\phi'_2}{3}=\phi_2-\dfrac{\phi_4}{3},$

則 $$\frac{\phi'_3}{3^2}=\frac{\dfrac{\phi'_2}{3}\cdot\dfrac{\phi'_2}{3}}{\phi_1}=\phi_3-\frac{2}{3}\phi_5+\frac{1}{3^2}\phi_7,$$

同理 $$\frac{\phi'_5}{3^4}=\frac{\dfrac{\phi'_3}{3^2}\cdot\dfrac{\phi'_3}{3^2}}{\phi_1}=\phi_5-\frac{4}{3}\phi_7+\frac{6}{3^2}\phi_9-\frac{4}{3^3}\phi_{11}+\frac{1}{3^4}\phi_{13},$$

$$\frac{\phi'_7}{3^6}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_5}{3^4}}{\phi_1}=\phi_7-\frac{6}{3}\phi_9+\frac{15}{3^2}\phi_{11}-\frac{20}{3^3}\phi_{13}$$

$$+\frac{15}{3^4}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_9}{3^8}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_7}{3^6}}{\phi_1}=\phi_9-\frac{8}{3}\phi_{11}+\frac{28}{3^2}\phi_{13}-\frac{56}{3^3}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{11}}{3^{10}}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_9}{3^8}}{\phi_1}=\phi_{11}-\frac{10}{3}\phi_{13}+\frac{45}{3^2}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{13}}{3^{12}}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_{11}}{3^{10}}}{\phi_1}=\phi_{13}-\frac{12}{3}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{15}}{3^{14}}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_{13}}{3^{12}}}{\phi_1}=\phi_{15}-\cdots\cdots.$$

因以上之關係可逐次代入,化得:

第一形腰之易率式,

$$\phi_1+\phi_3+\phi_5+\phi_7+\phi_9+\phi_{11}+\phi_{13}+\phi_{15}$$

$$=\phi'_1+\frac{\phi'_3}{3^2}+\frac{5\phi'_5}{3^5}+\frac{28\phi'_7}{3^8}+\frac{165\phi'_9}{3^{11}}+\frac{1001\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$+\frac{6188\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{15}}{3^{20}},$$

而 $5=(2\times1)+1\times3,$

$28=(5\times4-1)+1\times3^2,$

$165=(28\times6-5\times6)+1\times3^3,$

$1001=(165\times8-28\times15+5\times4)+1\times3^4,$

$6188=(1001\times10-165\times28+28\times20-5\times1)+1\times3^5,$

$38760=(6188\times12-1001\times45+165\times56-28\times15)+1\times3^6.$

……………………………………………

又因 $c_3=3\phi_2-\phi_4,$

令 $\phi'_1=\phi_1,\ \phi'_2=c_3,$

卽 $\frac{\phi'_2}{3}=\phi_2-\frac{\phi_4}{3},$

則 $$\frac{\phi'_3}{3^2}=\frac{\frac{\phi'_2}{3}\cdot\frac{\phi'_2}{3}}{\phi_1}=\phi_3-\frac{2}{3}\phi_5+\frac{1}{3^2}\phi_7,$$

同理 $$\frac{\phi'_4}{3^3}=\frac{\frac{\phi'_2}{3}\cdot\frac{\phi'_3}{3^2}}{\phi_1}=\phi_4-\frac{3}{3}\phi_6+\frac{3}{3^2}\phi_8-\frac{1}{3^3}\phi_{10},$$

$$\frac{\phi'_6}{3^5}=\phi_6-\frac{5}{3}\phi_8+\frac{10}{3^2}\phi_{10}-\frac{10}{3^3}\phi_{12}+\frac{5}{3^4}\phi_{14}-\frac{1}{3^5}\phi_{16},$$

$$\frac{\phi'_8}{3^7}=\phi_8-\frac{7}{3}\phi_{10}+\frac{21}{3^2}\phi_{12}-\frac{35}{3^3}\phi_{14}+\frac{35}{3^4}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{10}}{3^9}=\phi_{10}-\frac{9}{3}\phi_{12}+\frac{36}{3^2}\phi_{14}-\frac{84}{3^3}\phi_{16}+\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{12}}{3^{11}}=\phi_{12}-\frac{11}{3}\phi_{14}+\frac{55}{3^2}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{14}}{3^{13}}=\phi_{14}-\frac{13}{3}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{16}}{3^{15}}=\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

因以上之關係,可逐次代入化得

負第一形腰之易率式,

$$\phi_2+\phi_4+\phi_6+\phi_8+\phi_{10}+\phi_{12}+\phi_{14}+\phi_{16}$$

$$=\frac{\phi'_2}{3}+\frac{4\phi'_4}{3^4}+\frac{21\phi'_6}{3^7}+\frac{120\phi'_8}{3^{10}}+\frac{715\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4368\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{27132\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{170544\phi'_{16}}{3^{21}},$$

而 $4=(1)+1\times3$

$21=(4\times3)+1\times3^2$

$120=(21\times5-4\times3)+1\times3^3$

$715=(120\times7-21\times10+4\times1)+1\times3^4$

$4368=(715\times9-120\times21+21\times10)+1\times3^5$

………………………………………………

由是得"求三分之二起度各形腰底率",在$\frac{2}{3}$起度,$\triangle CSf'$爲負第一形.

α_{-1},負第一形CSf'腰,

$$CS=\frac{\phi'_2}{3}+\frac{4\phi'_4}{3^4}+\frac{21\phi'_6}{3^7}+\frac{120\phi'_8}{3^{10}}+\frac{715\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4368\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{27132\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{170544\phi'_{16}}{3^{21}},$$

α_1,第一形AST腰,

$$AS=\phi'_1+\frac{\phi'_3}{3^2}+\frac{5\phi'_5}{3^5}+\frac{28\phi'_7}{3^8}+\frac{165\phi'_9}{3^{11}}+\frac{1001\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$+\frac{6188\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_1,第一形AST底,

$$ST=\phi'_2+\frac{\phi'_4}{3^2}+\frac{5\phi'_6}{3^5}+\frac{28\phi'_8}{3^8}+\frac{165\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$+\frac{1001\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{6188\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$-\alpha_{-1}+\beta_1=\alpha_2$,第二形$CTa'$腰,

$$CT=\frac{2\phi'_2}{3}+\frac{5\phi_4'}{3^4}+\frac{24\phi'_6}{3^7}+\frac{132\phi'_8}{3^{10}}+\frac{770\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4641\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{28560\phi'_{14}}{3^7}+\frac{178296\phi'_{16}}{3^{22}},$$

β_2, 第二形 CTa' 底,

$$Ta'=\frac{2\phi'_3}{3}+\frac{5\phi'_5}{3^4}+\frac{24\phi'_7}{3^7}+\frac{132\phi'_9}{3^{10}}+\frac{770\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4641\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{28560\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$, 第三形 $Aa'b'$ 腰,

$$Aa'=\phi'_1-\frac{5\phi'_3}{3^2}-\frac{10\phi'_5}{3^5}-\frac{44\phi'_7}{3^8}-\frac{231\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{1309\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{7735\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{46920\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_3, 第三形 $Aa'b'$ 底,

$$a'b'=\phi'_2-\frac{5\phi'_4}{3^2}-\frac{10\phi'_6}{3^5}-\frac{44\phi'_8}{3^8}-\frac{231\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$-\frac{1309\phi'_{12}}{3^{14}}-\frac{7735\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{46920\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$, 第四形 $Cb'b''$ 腰,

$$Cb'=\frac{5\phi'_2}{3}-\frac{40\phi'_4}{3^4}-\frac{66\phi'_6}{3^7}-\frac{264\phi'_8}{3^{10}}-\frac{1309\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$-\frac{7140\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{41055\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{243984\phi'_{16}}{3^{22}},$$

β_4, 第四形 $Cb'b''$ 底,

$$b'b''=\frac{5\phi'_3}{3}-\frac{40\phi'_5}{3^4}-\frac{66\phi'_7}{3^7}-\frac{264\phi'_9}{3^{10}}-\frac{1309\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$-\frac{7140\phi'_{13}}{3^{16}}-\frac{41055\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5$, 第五形 $Ab''c'$ 腰,

$$Ab''=\phi_1-\frac{20\phi'_3}{3^2}+\frac{110\phi'_5}{3^5}+\frac{154\phi'_7}{3^8}+\frac{561\phi'_9}{3^{11}}$$

$$+\frac{2618\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{13685\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{76245\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_5, 第五形 $Ab''c'$ 底,

$$b''c'=\phi'_2-\frac{20\phi'_4}{3^2}+\frac{110\phi'_6}{3^5}+\frac{154\phi'_8}{3^8}+\frac{561\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$+\frac{2618\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{13685\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{76245\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\alpha_4+\beta_5=\alpha_6$, 第六形 $Cc'c''$ 腰,

$$Cc'=\frac{8\phi'_2}{3}-\frac{220\phi'_4}{3^4}+\frac{924\phi'_6}{3^7}+\frac{1122\phi'_8}{3^{10}}+\frac{3740\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{16422\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{82110\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{442221\phi'_{16}}{3^{22}}$$

β_6, 第六形 $Cc'c''$ 底,

$$c'c''=\frac{8\phi'_3}{3}-\frac{220\phi'_5}{3^4}+\frac{924\phi'_7}{3^7}+\frac{1122\phi'_9}{3^{10}}+\frac{3740\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$+\frac{16422\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{82110\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$，第七形腰，

$$=\phi'_1-\frac{44\phi'_3}{3^2}+\frac{770\phi'_5}{3^5}-\frac{2618\phi'_7}{3^8}-\frac{2805\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{8602\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{35581\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{170085\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_7，第七形底，

$$=\phi'_2-\frac{44\phi'_4}{3^2}+\frac{770\phi'_6}{3^5}-\frac{2618\phi'_8}{3^8}-\frac{2805\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$-\frac{8602\phi'_{12}}{3^{14}}-\frac{35581\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{170085\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\alpha_6+\beta_7=\alpha_8$，第八形腰，

$$=\frac{11\phi'_2}{3}-\frac{616\phi'_4}{3^4}+\frac{7854\phi'_6}{3^7}-\frac{22440\phi'_8}{3^{10}}$$

$$-\frac{21505\phi'_{10}}{2^{13}}-\frac{60996\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{238119\phi'_{14}}{3^{19}}$$

$$-\frac{1088544\phi'_{16}}{3^{22}},$$

又"求三分之一起度各形腰底率"，

α_{-2}，負第二形 CTa' 腰，

$$CT=\frac{2\phi'_2}{3}+\frac{5\phi'_4}{3^4}+\frac{24\phi'_6}{3^7}+\frac{132\phi'_8}{3^{10}}+\frac{770\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4641\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{28560\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{178296\phi'_{16}}{3^{22}},$$

α_1, 第一形 AST 腰,

$$AT=\phi'_1+\frac{\phi'_3}{3^2}+\frac{5\phi'_5}{3^5}+\frac{28\phi'_7}{3^8}+\frac{165\phi'_9}{3^{11}}+\frac{1001\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$+\frac{6188\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_1, 第一形 AST 底,

$$ST=\phi'_2+\frac{\phi'_4}{3^2}+\frac{5\phi'_6}{3^5}+\frac{28\phi'_8}{3^8}+\frac{165\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$+\frac{1001\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{6188\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\beta_1-\alpha_{-2}=\alpha_2$,第二形 CSf' 腰,

$$CS=\frac{\phi'_2}{3}+\frac{4\phi'_4}{3^4}+\frac{21\phi'_6}{3^7}+\frac{120\phi'_8}{3^{10}}+\frac{715\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4368\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{27132\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{170544\phi'_{16}}{3^{22}},$$

β_2 第二形 CSf' 底,

$$Sf'=\frac{\phi'_3}{3}+\frac{4\phi'_5}{3^4}+\frac{21\phi'_7}{3^7}+\frac{120\phi'_9}{3^{10}}+\frac{715\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4368\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{27132\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$, 第三形 $Af'g'$ 腰,

$$Af'=\phi'_1-\frac{2\phi'_3}{3^2}-\frac{7\phi'_5}{3^5}-\frac{35\phi'_7}{3^8}-\frac{195\phi'_9}{3^{11}}-\frac{1144\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$-\frac{6916\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{42636\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_3，第三形 $Af'g'$ 底，

$$f'g'=\phi'_2-\frac{2\phi'_4}{3^2}-\frac{7\phi'_6}{3^5}-\frac{35\phi'_8}{3^8}-\frac{195\phi'_{10}}{3^{11}}-\frac{1144\phi'_{12}}{3^{14}}$$

$$-\frac{6916\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{42636\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$，第四形 $Cg'g''$ 腰，

$$Cg'=\frac{4\phi'_2}{3}-\frac{14\phi'_4}{3^4}-\frac{42\phi'_6}{3^7}-\frac{195\phi'_8}{3^{10}}-\frac{1040\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$-\frac{5928\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{35112\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{213180\phi'_{16}}{3^{22}},$$

β_4，第四形 $Cg'g''$ 底，

$$g'g''=\frac{4\phi'_3}{3}-\frac{14\phi'_5}{3^4}-\frac{42\phi'_7}{3^7}-\frac{195\phi'_9}{3^{10}}-\frac{1040\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$-\frac{5928\phi'_{13}}{3^{16}}-\frac{35112\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5$，第五形 $Ag''h'$ 腰，

$$Ag''=\phi'_1-\frac{14\phi'_3}{3^2}+\frac{35\phi'_5}{3^5}+\frac{91\phi'_7}{3^8}+\frac{390\phi'_9}{3^{11}}$$

$$+\frac{1976\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{10868\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{62700\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_5, 第五形 $Ag''h'$ 底,

$$g''h'=\phi'_2-\frac{14\phi'_4}{3^2}+\frac{35\phi'_6}{3^5}+\frac{91\phi'_8}{3^8}+\frac{390\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$+\frac{1976\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{10868\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{62700\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\alpha_4-\beta_5=\alpha_6$, 第六形 $Ch'h''$ 腰,

$$Ch'=\frac{7\phi'_2}{3}-\frac{140\phi'_4}{3^4}+\frac{273\phi'_6}{3^7}+\frac{624\phi'_8}{3^{10}}+\frac{2470\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{11856\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{62700\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{351120\phi'_{16}}{3^{22}},$$

β_6, 第六形 $Ch'h''$ 底,

$$h'h''=\frac{7\phi'_3}{3}-\frac{140\phi'_5}{3^4}+\frac{273\phi'_7}{3^7}+\frac{624\phi'_9}{3^{10}}+\frac{2470\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$+\frac{11856\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{62700\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$, 第七形腰,

$$=\phi'_1-\frac{35\phi'_3}{3^2}+\frac{455\phi'_5}{3^5}-\frac{728\phi'_7}{3^8}-\frac{1482\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{5434\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{24700\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{125400\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_7, 第七形底,

$$=\phi'_2-\frac{35\phi'_4}{3^2}+\frac{455\phi'_6}{3^5}-\frac{728\phi'_8}{3^8}-\frac{1482\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$-\frac{5434\phi'_{12}}{3^{14}}-\frac{24700\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{125400\phi'_{16}}{3^{20}}.$$

$a_6+\beta_7=a_8$, 第八形腰,

$$=\frac{10\phi'_2}{3}-\frac{455\phi'_4}{3^4}+\frac{4368\phi'_6}{3^7}-\frac{5928\phi'_8}{3^{10}}$$

$$-\frac{10868\phi'_{10}}{3^{13}}-\frac{37050\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{159600\phi'_{14}}{3^{19}}$$

$$-\frac{777480\phi'_{16}}{3^{22}},$$

………………………………………………

故"三分弧之二起度各通弦率",

$\phi'_1=r_1\ \ \phi'_2=c_3$

$$a_{-1}-a_2,\ c_{\frac{1}{3}}=\frac{\phi'_2}{3}+\frac{\phi'_4}{3^4}+\frac{3\phi'_6}{3^7}+\frac{12\phi'_8}{3^{10}}+\frac{55\phi'_{10}}{3^{13}}+\frac{273\phi'_{12}}{3^{16}}$$

$$+\frac{1428\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{7752\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$a_2+a_4,\ c_{\frac{7}{3}}=\frac{7\phi'_2}{3}-\frac{35\phi'_4}{3^4}-\frac{42\phi'_6}{3^7}-\frac{132\phi'_8}{3^{10}}-\frac{539\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$-\frac{2489\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{12495\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{65686\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$a_4+a_6,\ c_{\frac{13}{3}}=\frac{13\phi'_2}{3}-\frac{260\phi'_4}{3^4}+\frac{858\phi'_6}{3^7}+\frac{858\phi'_8}{3^{10}}+\frac{2431\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{9282\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{41055\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{198237\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$a_6+a_8,\ c_{\frac{19}{3}}=\frac{19\phi'_2}{3}-\frac{836\phi'_4}{3^4}+\frac{8778\phi'_6}{3^7}-\frac{21318\phi'_8}{3^{10}}$$

$$-\frac{17765\phi'_{10}}{3^{13}}-\frac{44574\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{156009\phi'_{14}}{3^{19}}$$

$$-\frac{646323\phi'_{16}}{3^{22}},$$

"三分弧之二起度各倍矢率",

$$2\phi'_1-a_1-a_3,\ b_{\frac{2}{3}}=\frac{4\phi'_3}{3^2}+\frac{5\phi'_5}{3^5}+\frac{16\phi'_7}{3^8}+\frac{66\phi'_9}{3^{11}}+\frac{308\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$+\frac{1547\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{8160\phi'_{15}}{3^{20}},$$

$$2\phi'_1-a_3-a_5,\ b_{\frac{5}{3}}=\frac{25\phi'_3}{3^2}-\frac{100\phi'_5}{3^5}-\frac{110\phi'_7}{3^8}-\frac{330\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{1309\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{5950\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{29325\phi'_{15}}{3^{20}}$$

$$2\phi'_1-a_5-a_7,\ b_{\frac{8}{3}}=\frac{64\phi'_3}{3^2}-\frac{880\phi'_5}{3^5}+\frac{2464\phi'_7}{3^8}+\frac{2244\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{5984\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{21896\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{93840\phi'_{15}}{3^{20}},$$

又"三分弧之一起度各通弦率"

$$a_2+a_4,\ c_{\frac{5}{3}}=\frac{5\phi'_2}{3}-\frac{10\phi'_4}{3^4}-\frac{21\phi'_6}{3^7}-\frac{75\phi'_8}{3^{10}}$$

$$-\frac{325\phi'_{10}}{3^{18}}-\frac{1560\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{7980\phi'_{14}}{3^{19}}$$

$$-\frac{42636\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$a_4+a_6,\ c_{\frac{11}{3}}=\frac{11\phi'_2}{3}-\frac{154\phi'_4}{3^4}+\frac{231\phi'_6}{3^7}+\frac{429\phi'_8}{3^{10}}$$

$$+\frac{1430\phi'_{10}}{3^{13}}+\frac{5928\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{27588\phi'_{14}}{3^{19}}$$

$$+\frac{137940\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$a_6+a_8,\ c_{\frac{17}{3}}=\frac{17\phi'_2}{3}-\frac{595\phi'_4}{3^4}+\frac{4641\phi'_6}{3^7}+\frac{5304\phi'_8}{3^{10}}$$

$$-\frac{8398\phi'_{10}}{3^{13}}-\frac{25194\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{96900\phi'_{14}}{3^{19}},$$

$$-\frac{426360\phi'_{16}}{3^{22}},$$

"三分弧之一起度各倍矢率"

$$2\phi'_1-a_1-a_3,\ b_{\frac{1}{3}}=\frac{\phi'_3}{3^2}+\frac{2\phi'_5}{3^5}+\frac{7\phi'_7}{3^8}+\frac{30\phi'_9}{3^{11}}+\frac{143\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$+\frac{728\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{3876\phi'_{15}}{3^{20}},$$

$$2\phi'_1-a_3-a_5,\ b_{\frac{4}{3}}=\frac{16\phi'_3}{3^2}-\frac{28\phi'_5}{3^5}-\frac{56\phi'_7}{3^8}-\frac{195\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{832\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{3952\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{20064\phi'_{15}}{3^{20}}$$

$$2\phi'_1-a_5-a_7,\ b_{\frac{7}{3}}=\frac{49\phi'_3}{3^2}-\frac{490\phi'_5}{3^5}+\frac{637\phi'_7}{3^8}+\frac{1092\phi'_9}{3^{11}}$$

$$+\frac{3458\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{13832\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{62700\phi'_{15}}{3^{20}}.$$

故 $$c_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}\phi'_2-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{2^2\cdot\underline{|3}}\phi'_4$$

$$+\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{2^4\cdot\underline{|5}}\phi'_6,$$

$$-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-5^2\right\}}{2^6\cdot\underline{|7}}\phi_8$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XII)}$$

$$b_{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi'_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{3\cdot 4}\phi'_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\phi'_7$$

$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\phi'_9$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XIII)}$$

(第二: 令 $\frac{n}{m}=\frac{n}{4}$)

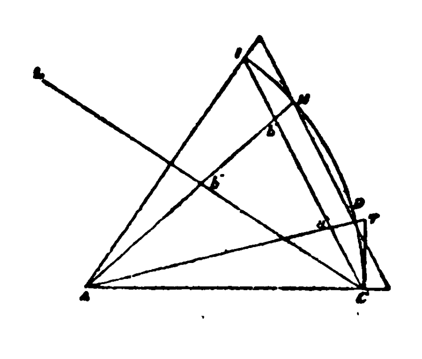
如第三十五圖 BE 爲本弧,四分爲 $BC\left(=\frac{BE}{4}\right)$, $CE\left(=\frac{2BE}{4}\right)$, $EF\left(=\frac{BE}{4}\right)$,作 CE 弦引出圓外,交 AB, AF 之引長線於 S, T,則 $\triangle$, AST, ABF 爲相似三角形.又作 CI, CL, CO 各線爲 $\frac{10}{4}$, $\frac{18}{4}$, $\frac{26}{4}$ 弧通弦.

$\frac{n}{4}$ 分弧起度,可分爲 $\frac{3}{4}$ 分弧起度,及 $\frac{1}{4}$ 分弧起度之二例.

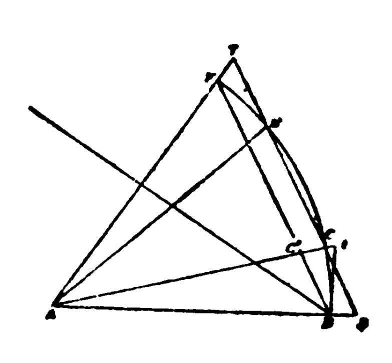
如前例,前者以 $A'AC$ 線上半圓起算,後者以 $A'AC$ 線下半圓起算.

第三十五圖

次如前用"借率法",并參觀(B)半分起度弦矢率論,附圖第三十一圖,及第三十六圖



第三十一圖



第三十六圖

因 $AS=\frac{AC\times AB}{Ac'}=\frac{r\cdot r}{\phi_1-\frac{3}{2^3}\phi_3-\frac{5}{2^7}\phi_5-\frac{14}{2^{11}}\phi_7-\frac{45}{2^{15}}\phi_9-\frac{154}{2^{19}}\phi_{11}-\frac{546}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{1980}{2^{27}}\phi_{15}}$,

而 Ac' 卽前半$\left(\frac{1}{2}\right)$分起度之第三形腰; Aa'

故　第一形 AST 腰,

$$AS=\phi_1+\frac{3\phi_3}{2^3}+\frac{23\phi_5}{2^7}+\frac{182\phi_7}{2^{11}}+\frac{1451\phi_9}{2^{15}}+\frac{11594\phi_{11}}{2^{19}}+\frac{92710\phi_{13}}{2^{23}}+\frac{741548\phi_{15}}{2^{27}}.$$

又因 $CS=\frac{AC\times BC'}{AC'}=\frac{AC\times Bt}{AC'}$ (第三十六圖)

$$=\frac{\phi_1\left(\frac{\phi_2}{2}+\frac{\phi_4}{2^4}+\frac{3\phi_6}{2^8}+\frac{10\phi_8}{2^{12}}+\frac{35\phi_{10}}{2^{16}}+\frac{126\phi_{12}}{2^{20}}+\frac{462\phi_{14}}{2^{24}}+\frac{1716\phi_{16}}{2^{28}}\right)}{\phi_1-\frac{3\phi_3}{2^3}-\frac{5\phi_5}{2^7}-\frac{14\phi_7}{2^{11}}-\frac{45\phi_9}{2^{15}}-\frac{154\phi_{11}}{2^{19}}-\frac{546\phi_{13}}{2^{23}}-\frac{1980\phi_{15}}{2^{27}}}$$

而 Bt 卽前半$\left(\frac{1}{2}\right)$分起度之第二形腰, CT. (第三十一圖),

故　第二形 CSf' 腰，

$$CS=\frac{\phi_2}{2}+\frac{4\phi_4}{2^4}+\frac{32\phi_6}{2^8}+\frac{256\phi_8}{2^{12}}+\frac{2048\phi_{10}}{2^{16}}$$

$$+\frac{16384\phi_{12}}{2^{20}}+\frac{131072\phi_{14}}{2^{24}}+\frac{1048576\phi_{16}}{2^{28}}.$$

復次用"易率法"：

因　$b_2=4\phi_3-\phi_5.$

令　$\phi'_1=\phi_1,\quad \phi'_3=b_2.$

卽　$\frac{\phi'_3}{2^2}=\phi_3-\frac{4\phi_5}{2^4},$

則　$\frac{\phi'_5}{2^4}=\phi_5-\frac{8\phi_7}{2^4}+\frac{16\phi_9}{2^8},$

$$\frac{\phi'_7}{2^6}=\phi_7-\frac{12\phi_9}{2^4}+\frac{48\phi_{11}}{2^8}-\frac{24\phi_{13}}{2^{12}},$$

$$\frac{\phi'_9}{2^8}=\phi_9-\frac{16\phi_{11}}{2^4}+\frac{96\phi_{13}}{2^8}-\frac{256\phi_{15}}{2^{12}}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{11}}{2^{10}}=\phi_{11}-\frac{20\phi_{13}}{2^4}+\frac{160\phi_{15}}{2^8}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{13}}{2^{12}}=\phi_{13}-\frac{24\phi_{15}}{2^4}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{15}}{2^{14}}=\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

因以上之關係,可逐次代入化得:

第一形腰之易率式,

$$\phi_1+\frac{3\phi_3}{2^3}+\frac{23\phi_5}{2^7}+\frac{182\phi_7}{2^{11}}+\frac{1451\phi_9}{2^{15}}+\frac{11594\phi_{11}}{2^{19}}+\frac{92710\phi_{13}}{2^{23}}$$

$$+\frac{741548\phi_{15}}{2^{27}}=\phi'_1+\frac{3\phi'_3}{2^5}+\frac{35\phi'_5}{2^{11}}+\frac{462\phi'_7}{2^{17}}+\frac{6435\phi'_9}{2^{23}}$$

$$+\frac{92378\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{1352078\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{20058300\phi'_{15}}{2^{41}}.$$

而

$$35=23+3\times4,$$

$$462=182+35\times8,$$

$$6435=1451+462\times12-35\times16,$$

$$92378=11594+6435\times16-462\times48,$$

$$1352078=92710+92378\times20-6435\times96+462\times64,$$

$$20058300=741548+1352078\times24-92378\times160$$

$$+6435\times256.$$

又因

$$c_2=2\phi_2-\frac{\phi_4}{2^2}-\frac{\phi_6}{2^6}-\frac{2\phi_8}{2^{10}}-\frac{5\phi_{10}}{2^{14}}-\frac{14\phi_{12}}{2^{18}}$$

$$-\frac{42\phi_{14}}{2^{22}}-\frac{132\phi_{16}}{2^{26}}.$$

$$b_2=4\phi_3-\phi_5,$$

如前令　$\phi'_1=\phi_1$,　$\phi_3'=b_2$,

則 $\frac{\phi'_2}{2}=\frac{c_2}{2}=\phi_2-\frac{2\phi_4}{2^4}-\frac{2\phi_6}{2^8}-\frac{4\phi_8}{2^{12}}-\frac{10\phi_{10}}{2^{16}}-\frac{28\phi_{12}}{2^{20}}$

$-\frac{84\phi_{14}}{2^{24}}-\frac{264\phi_{16}}{2^{28}}$.

蓋因 $\frac{\phi'_3}{2^2}=\frac{\frac{\phi'_2}{2}\cdot\frac{\phi'_2}{2}}{\phi_1}=\frac{b_2}{2^2}=\phi_3-\frac{\phi_5}{2^2}$ 也.

同理, $\frac{\phi'_4}{2^3}=\frac{\frac{\phi'_2}{2}\cdot\frac{\phi'_3}{2^2}}{\phi_1}=\phi_4-\frac{6\phi_6}{2^4}+\frac{6\phi_8}{2^8}+\frac{4\phi_{10}}{2^{12}}+\frac{6\phi_{12}}{2^{16}}$

$+\frac{12\phi_{14}}{2^{20}}+\frac{28\phi_{16}}{2^{24}}$,

$\frac{\phi'_6}{2^5}=\phi_6-\frac{10\phi_8}{2^4}+\frac{30\phi_{10}}{2^8}-\frac{20\phi_{12}}{2^{12}}-\frac{10\phi_{14}}{2^{16}}-\frac{12\phi_{16}}{2^{20}}$,

$\frac{\phi'_8}{2^7}=\phi_8-\frac{14\phi_{10}}{2^4}+\frac{70\phi_{12}}{2^8}-\frac{140\phi_{14}}{2^{12}}+\frac{70\phi_{16}}{2^{16}}$,

$\frac{\phi'_{10}}{2^9}=\phi_{10}-\frac{18\phi_{12}}{2^4}+\frac{126\phi_{14}}{2^8}-\frac{420\phi_{16}}{2^{12}}$,

$\frac{\phi'_{12}}{2^{11}}=\phi_{12}-\frac{22\phi_{14}}{2^4}+\frac{198\phi_{16}}{2^8}$,

$\frac{\phi'_{14}}{2^{13}}=\phi_{14}-\frac{26\phi_{16}}{2^4}$,

$\frac{\phi'_{16}}{2^{15}}=\phi_{16}$.

因以上之關係,可逐次代入,化得,

第二形腰之易率式,

$$\frac{\phi_2}{2}+\frac{4\phi_4}{2^4}+\frac{32\phi_6}{2^8}+\frac{256\phi_8}{2^{12}}+\frac{2048\phi_{10}}{2^{16}}+\frac{16384\phi_{12}}{2^{20}}+\frac{131072\phi_{14}}{2^{24}}$$

$$+\frac{1048576\phi_{16}}{2^{28}},$$

$$=\frac{\phi'_2}{2^2}+\frac{5\phi'_4}{2^7}+\frac{63\phi'_6}{2^{13}}+\frac{858\phi'_8}{2^{19}}+\frac{12155\phi'_{10}}{2^{25}}+\frac{176358\phi'_{12}}{2^{31}}$$

$$+\frac{2600150\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{38779380\phi'_{16}}{2^{47}},$$

而 $$5=4+\frac{2}{2},$$

$$63=32+5\times6+\frac{2}{2},$$

$$858=256+63\times10-5\times6+\frac{4}{2},$$

$$12155=2048+858\times14-63\times30-5\times4+\frac{10}{2}$$

$$176358=16384+12155\times18-858\times70+63\times20$$
$$-5\times6+\frac{28}{2},$$

$$2600150=131072+176358\times22-12155\times126$$
$$+858\times140+63\times10-5\times12+\frac{84}{2},$$

$$38779380=1048576+2600150\times26-176358\times198$$
$$+12155\times420-858\times70+63\times12-5\times28$$
$$+\frac{264}{2}.$$

....

由是得“求四分之三起度各形腰底率”，

α_{-1}，負第一形 CSf' 腰，

$$CS=\frac{\phi'_2}{2^2}+\frac{5\phi'_4}{2^7}+\frac{63\phi'_6}{2^{13}}+\frac{858\phi'_8}{2^{19}}+\frac{12155\phi'_{10}}{2^{25}}$$
$$+\frac{176358\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{2600150\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{38779380\phi'_{16}}{2^{43}},$$

α_1，第一形 AST 腰，

$$AS=\phi'_1+\frac{3\phi'_3}{2^5}+\frac{35\phi'_5}{2^{11}}+\frac{462\phi'_7}{2^{17}}+\frac{6435\phi'_9}{2^{23}}$$
$$+\frac{92378\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{1352078\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{20058300\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_1，第一形 AST 底，

$$ST=\phi'_2+\frac{3\phi'_4}{2^5}+\frac{35\phi'_6}{2^{11}}+\frac{462\phi'_8}{2^{17}}+\frac{6435\phi'_{10}}{2^{23}}$$
$$+\frac{92378\phi'_{12}}{2^{29}}+\frac{1352078\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{20058300\phi'_{16}}{2^{41}},$$

$-\alpha_{-1}+\beta_1=\alpha_2$，第二形 CTa' 腰，

$$CT=\frac{3\phi'_2}{2^2}+\frac{7\phi'_4}{2^7}+\frac{77\phi'_6}{2^{13}}+\frac{990\phi'_8}{2^{19}}+\frac{13585\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$+\frac{193154\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{2808162\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{41453820\phi'_{16}}{2^{43}}$$

β_2, 第二形 CTa' 底,

$$Ta'=\frac{3\phi'_3}{2^2}+\frac{7\phi'_5}{2^7}+\frac{77\phi'_7}{2^{13}}+\frac{990\phi'_9}{2^{19}}+\frac{13585\phi'_{11}}{2^{25}}$$

$$+\frac{193154\phi'_{13}}{2^{31}}+\frac{2808162\phi'_{15}}{2^{37}},$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$, 第三形 $Aa'b'$ 腰,

$$Aa'=\phi'_1-\frac{21\phi'_3}{2^5}-\frac{77\phi'_5}{2^{11}}-\frac{770\phi'_7}{2^{17}}-\frac{9405\phi'_9}{2^{23}}$$

$$-\frac{124982\phi'_{11}}{2^{29}}-\frac{1738386\phi'_{13}}{2^{35}}-\frac{24872292\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_3, 第三形 $Aa'b'$ 底,

$$a'b'=\phi'_2-\frac{21\phi'_4}{2^5}-\frac{77\phi'_6}{2^{11}}-\frac{770\phi'_8}{2^{17}}-\frac{9405\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$-\frac{124982\phi'_{12}}{2^{29}}-\frac{1738386\phi'_{14}}{2^{35}}-\frac{24872292\phi'_{16}}{2^{41}},$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$, 第四形 $Cb'b''$ 腰,

$$Cb'=\frac{7\phi'_2}{2^2}-\frac{77\phi'_4}{2^7}-\frac{231\phi'_6}{2^{13}}-\frac{2090\phi'_8}{2^{19}}-\frac{24035\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$-\frac{306774\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{4145382\phi'_{14}}{2^{37}}-\frac{58035348\phi'_{16}}{2^{43}}$$

β_4，第四形 $Cb'b''$ 底，

$$b'b''=\frac{7\phi'_3}{2^2}-\frac{77\phi'_5}{2^7}-\frac{231\phi'_7}{2^{18}}-\frac{2090\phi'_9}{2^{19}}-\frac{24035\phi'_{11}}{2^{25}}$$

$$-\frac{306774\phi'_{13}}{2^{31}}-\frac{4145382\phi'_{15}}{2^{37}},$$

$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5$，第五形 $Ab''c'$ 腰，

$$Ab''=\phi'_1-\frac{77\phi'_3}{2^5}+\frac{1155\phi'_5}{2^{11}}+\frac{2926\phi'_7}{2^{17}}+\frac{24035\phi'_9}{2^{23}}$$

$$+\frac{259578\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{3169998\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{41453820\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_5，第五形 $Ab''c'$ 底，

$$b''c'=\phi'_2-\frac{77\phi'_4}{2^5}+\frac{1155\phi'_6}{2^{11}}+\frac{2926\phi'_8}{2^{17}}+\frac{24035\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$+\frac{259578\phi'_{12}}{2^{29}}+\frac{3169998\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{41453820\phi'_{16}}{2^{41}},$$

$\alpha_4+\beta_5=\alpha_6$，第六形 $Cc'c''$ 腰，

$$Cc'=\frac{11\phi'_2}{2^2}-\frac{385\phi'_4}{2^7}+\frac{4389\phi'_6}{2^{13}}+\frac{9614\phi'_8}{2^{19}}$$

$$+\frac{72105\phi'_{10}}{2^{25}}+\frac{731538\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{8534610\phi'_{14}}{2^{37}}$$

$$+\frac{107779932\phi'_{16}}{2^{43}}$$

β_6, 第六形 $Cc'c''$ 底,

$$c'c''=\frac{11\phi'_3}{2^2}-\frac{385\phi'_5}{2^7}+\frac{4389\phi'_7}{2^{13}}+\frac{9614\phi'_9}{2^{19}}$$

$$+\frac{72105\phi'_{11}}{2^{25}}+\frac{731538\phi'_{13}}{2^{31}}+\frac{8534610\phi'_{15}}{2^{37}},$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$, 第七形腰,

$$=\phi'_1-\frac{165\phi'_3}{2^5}+\frac{7315\phi'_5}{2^{11}}-\frac{67298\phi'_7}{2^{17}}-\frac{129789\phi'_9}{2^{23}}$$

$$-\frac{894102\phi'_{11}}{2^{29}}-\frac{8534610\phi'_{13}}{2^{35}}-\frac{95099940\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_7, 第七形底,

$$=\phi'_2-\frac{165\phi'_4}{2^5}+\frac{7315\phi'_6}{2^{11}}-\frac{67298\phi'_8}{2^{17}}-\frac{129789\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$-\frac{894102\phi'_{12}}{2^{29}}-\frac{8534610\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{95099940\phi'_{16}}{2^{41}}$$

$\alpha_6+\beta_7=\alpha_8$, 第八形腰,

$$=\frac{15\phi'_2}{2^2}-\frac{1045\phi'_4}{2^7}+\frac{33649\phi'_6}{2^{13}}-\frac{259578\phi'_8}{2^{19}}$$

$$-\frac{447051\phi'_{10}}{2^{25}}-\frac{2844870\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{25603830\phi'_{14}}{2^{37}}$$

$$-\frac{272619828\phi'_{16}}{2^{43}},$$

....

又"求四分之一起度各形腰底率",

α_{-2},負第二形 CTa' 腰,

$$CT=\frac{3\phi'_2}{2^2}+\frac{7\phi'_4}{2^7}+\frac{77\phi'_6}{2^{18}}+\frac{990\phi'_8}{2^{19}}+\frac{13585\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$+\frac{193154\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{2808162\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{41453820\phi'_{16}}{2^{48}},$$

α_1, 第一形 AST 腰,

$$AT=\phi'_1+\frac{3\phi'_3}{2^5}+\frac{35\phi'_5}{2^{11}}+\frac{462\phi'_7}{2^{17}}+\frac{6435\phi'_9}{2^{23}}$$

$$+\frac{92378\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{1352078\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{20058300\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_1, 第一形 AST 底,

$$ST=\phi'_2+\frac{3\phi'_4}{2^5}+\frac{35\phi'_6}{2^{11}}+\frac{462\phi'_8}{2^{17}}+\frac{6435\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$+\frac{92378\phi'_{12}}{2^{29}}+\frac{1352078\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{20058300\phi'_{16}}{2^{41}},$$

$-\alpha_{-2}+\beta_1=\alpha_2$, 第二形 CSf' 腰,

$$CS=\frac{\phi'_2}{2^2}+\frac{5\phi'_4}{2^7}+\frac{63\phi'_6}{3^{18}}+\frac{858\phi'_8}{2^{19}}+\frac{12155\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$+\frac{176358\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{2600150\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{38779380\phi'_{16}}{2^{48}},$$

β_2, 第二形 CSf' 底,

$$Sf'=\frac{\phi'_3}{2^2}+\frac{5\phi'_5}{2^7}+\frac{63\phi'_7}{2^{13}}+\frac{858\phi'_9}{2^{19}}+\frac{12155\phi'_{11}}{2^{25}}$$

$$+\frac{176358\phi'_{13}}{2^{31}}+\frac{2600150\phi'_{15}}{2^{37}},$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$, 第三形 $Af'g'$ 腰,

$$Af'=\phi'_1-\frac{5\phi'_3}{2^5}-\frac{45\phi'_5}{2^{11}}-\frac{546\phi'_7}{2^{17}}-\frac{7293\phi'_9}{2^{28}}$$

$$-\frac{102102\phi'_{11}}{2^{29}}-\frac{1469650\phi'_{13}}{2^{35}}-\frac{21544100\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_3, 第三形 $Af'g'$ 底,

$$f'g'=\phi'_2-\frac{5\phi'_4}{2^5}-\frac{45\phi'_6}{2^{11}}-\frac{546\phi'_8}{2^{17}}-\frac{7293\phi'_{10}}{2^{28}}$$

$$-\frac{102102\phi'_{12}}{2^{29}}-\frac{1469650\phi'_{14}}{2^{35}}-\frac{21544100\phi'_{16}}{2^{41}},$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$, 第四形 $Cg'g''$ 腰,

$$Cg'=\frac{5\phi'_2}{2^2}-\frac{15\phi'_4}{2^7}-\frac{117\phi'_6}{2^{13}}-\frac{1326\phi'_8}{2^{19}}-\frac{17017\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$-\frac{232050\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{3278450\phi'_{14}}{2^{37}}-\frac{47397020\phi'_{16}}{2^{43}},$$

β_4, 第四形 $Cg'g''$ 底,

$$g'g''=\frac{5\phi'_3}{2^2}-\frac{15\phi'_5}{2^7}-\frac{117\phi'_7}{2^{13}}-\frac{1326\phi'_9}{2^{19}}-\frac{17017\phi'_{11}}{2^{25}}$$

$$-\frac{232050\phi'_{13}}{2^{31}}-\frac{3278450\phi'_{15}}{2^{37}},$$

α_5, 第五形 $Ag''h'$ 腰,

$$Ag''=\phi'_1-\frac{45\phi'_3}{2^5}+\frac{195\phi'_5}{2^{11}}+\frac{1326\phi'_7}{2^{17}}+\frac{13923\phi'_9}{2^{23}}$$

$$+\frac{170170\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{2243150\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{30911100\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_5, 第五形 $Ag''h'$ 底,

$$g''h'=\phi_2-\frac{45\phi'_4}{2^5}+\frac{195\phi'_6}{2^{11}}+\frac{1326\phi'_8}{2^{17}}+\frac{13923\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$+\frac{170170\phi'_{12}}{2^{29}}+\frac{2243150\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{30911100\phi'_{16}}{2^{41}},$$

α_6, 第六形 $Ch'h''$ 腰,

$$Ch'=\frac{9\phi'_2}{2^2}-\frac{195\phi'_4}{2^7}+\frac{663\phi'_6}{2^{13}}+\frac{3978\phi'_8}{2^{19}}+\frac{38675\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$+\frac{448630\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{5694150\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{76247380\phi'_{16}}{2^{43}},$$

β_6, 第六形 $Ch'h''$ 底,

$$h'h''=\frac{9\phi'_3}{2^2}-\frac{195\phi'_5}{2^7}+\frac{663\phi'_7}{2^{18}}+\frac{3978\phi'_9}{2^{19}}+\frac{38675\phi'_{11}}{2^{25}}$$

$$+\frac{448630\phi'_{13}}{2^{31}}+\frac{5694150\phi'_{15}}{2^{37}},$$

α_7, 第七形腰,

$$=\phi'_1-\frac{117\phi'_3}{2^5}+\frac{3315\phi'_5}{2^{11}}-\frac{9282\phi'_7}{2^{17}}-\frac{49725\phi'_9}{2^{23}}$$

$$-\frac{448630\phi'_{11}}{2^{29}}-\frac{4934930\phi'_{13}}{2^{35}}-\frac{60195300\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_7, 第七形底,

$$=\phi'_2-\frac{117\phi'_4}{2^5}+\frac{3315\phi'_6}{2^{11}}-\frac{9282\phi'_8}{2^{17}}-\frac{49725\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$-\frac{448630\phi'_{12}}{2^{29}}-\frac{4934930\phi'_{14}}{2^{35}}-\frac{60195300\phi'_{16}}{2^{41}},$$

α_8, 第八形腰,

$$=\frac{13\phi'_2}{2^2}-\frac{663\phi'_4}{2^7}+\frac{13923\phi'_6}{2^{13}}-\frac{33150\phi'_8}{2^{19}}$$

$$-\frac{160225\phi'_{10}}{2^{25}}-\frac{1355890\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{14045570\phi'_{14}}{2^{37}}$$

$$-\frac{164533820\phi'_{16}}{2^{43}}.$$

故"四分弧之三起度各通弦率",

$$-\alpha_{-1}+\alpha_2,\quad c_{\frac{2}{4}}=c_{\frac{1}{2}}=\frac{\phi'_2}{2}+\frac{\phi'_4}{2^6}+\frac{7\phi'_6}{2^{12}}+\frac{66\phi'_8}{2^{18}}+\frac{715\phi'_{10}}{2^{24}}$$

$$+\frac{8398\phi'_{12}}{2^{30}}+\frac{104006\phi'_{14}}{2^{36}}+\frac{1337020\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$a_2+a_4,\quad c_{\frac{10}{4}}=c_{\frac{5}{2}}=\frac{5\phi'_2}{2}-\frac{35\phi'_4}{2^6}-\frac{77\phi'_6}{2^{12}}-\frac{550\phi'_8}{2^{18}}$$

$$-\frac{5225\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{56810\phi'_{12}}{2^{30}}-\frac{668610\phi'_{14}}{2^{36}}$$

$$-\frac{8290764\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$a_4+a_6,\quad c_{\frac{18}{4}}=c_{\frac{9}{2}}=\frac{9\phi'_2}{2}-\frac{231\phi'_4}{2^6}+\frac{2079\phi'_6}{2^{12}}+\frac{3762\phi'_8}{2^{18}}$$

$$+\frac{24035\phi'_{10}}{2^{24}}+\frac{212382\phi'_{12}}{2^{30}}+\frac{2194614\phi'_{14}}{2^{36}}$$

$$+\frac{24872292\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$a_6+a_8,\quad c_{\frac{26}{4}}=c_{\frac{13}{2}}=\frac{13\phi'_2}{2}-\frac{715\phi'_4}{2^6}+\frac{19019\phi'_6}{2^{12}}$$

$$-\frac{124982\phi'_8}{2^{18}}-\frac{187473\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{1056666\phi'_{12}}{2^{30}}$$

$$-\frac{8534610\phi'_{14}}{2^{36}}-\frac{8241948\phi'_{16}}{2^{42}};$$

"四分弧之三起度各倍矢率",

$$2\phi_1-a_1-a_3,\quad b_{\frac{3}{4}}=\frac{9\phi'_3}{4^2}+\frac{21\phi'_5}{4^5}+\frac{154\phi'_7}{4^8}+\frac{1485\phi'_9}{4^{11}}$$

$$+\frac{16302\phi'_{11}}{4^{14}}+\frac{193154\phi'_{13}}{4^{17}}$$

$$+\frac{2406996\phi'_{15}}{4^{20}},$$

$$2\phi_1-a_3-a_5,\ b_{\frac{4}{7}}=\frac{49\phi'_3}{4^2}-\frac{539\phi'_5}{4^5}-\frac{1078\phi'_7}{4^8}-\frac{7315\phi'_9}{4^{11}}$$

$$-\frac{67298\phi'_{11}}{4^{14}}-\frac{715806\phi'_{13}}{4^{17}}-\frac{8290764\phi'_{15}}{4^{20}},$$

$$2\phi_1-a_5-a_7,\ b_{1\frac{1}{4}}=\frac{121\phi'_3}{4^2}-\frac{4235\phi'_5}{4^5}+\frac{32186\phi'_7}{4^8}+\frac{52877\phi'_9}{4^{11}}$$

$$+\frac{317262\phi'_{11}}{4^{14}}+\frac{2682306\phi'_{13}}{4^{17}}$$

$$+\frac{26823060\phi'_{15}}{4^{20}};$$

* * *

又"四分弧之一起度各通弦率",

$$a_2+a_4,,\ c_{\frac{3}{3}}=\frac{3\phi'_2}{2}-\frac{5\phi'_4}{2^6}-\frac{27\phi'_6}{2^{12}}-\frac{234\phi'_8}{2^{18}}$$

$$-\frac{2431\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{27846\phi'_{12}}{2^{30}}-\frac{339150\phi'_{14}}{2^{36}}$$

$$-\frac{4308820\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$a_4+a_6,\quad c_{\frac{7}{2}}=\frac{7\phi'_2}{2}-\frac{105\phi'_4}{2^6}+\frac{273\phi'_6}{2^{12}}+\frac{1326\phi'_8}{2^{18}}$$

$$+\frac{10829\phi'_{10}}{2^{24}}+\frac{108290\phi'_{12}}{2^{30}}$$

$$+\frac{1207850\phi'_{14}}{2^{36}}+\frac{14425180\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$a_6+a_8,\quad c_{\frac{11}{2}}=\frac{11\phi'_2}{2}-\frac{429\phi'_4}{2^6}+\frac{7293\phi'_6}{2^{12}}-\frac{14589\phi'_8}{2^{18}}$$

$$-\frac{60775\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{448630\phi'_{12}}{2^{30}}-\frac{4175710\phi'_{14}}{2^{36}}$$

$$-\frac{44143220\phi'_{16}}{2^{42}},$$

“四分弧之一起度各倍矢率”,

$$2\phi_1-a_1-a_3,\quad b_{\frac{1}{4}}=\frac{\phi'_3}{4^2}+\frac{5\phi'_5}{4^5}+\frac{42\phi'_7}{4^8}+\frac{429\phi'_9}{4^{11}}+\frac{4862\phi'_{11}}{4^{14}}$$

$$+\frac{58786\phi'_{13}}{4^{17}}+\frac{742900\phi'_{15}}{4^{20}},$$

$$2\phi_1-a_3-a_5,\quad b_{\frac{5}{4}}=\frac{25\phi'_3}{4^2}-\frac{75\phi'_5}{4^5}-\frac{390\phi'_7}{4^8}-\frac{3315\phi'_9}{4^{11}}$$

$$-\frac{34034\phi'_{11}}{4^{14}}-\frac{386750\phi'_{13}}{4^{17}}-\frac{4683500\phi'_{15}}{4^{20}}$$

$$2\phi_1-a_5-a_7,\quad b_{\frac{9}{4}}=\frac{81\phi'_3}{4^2}-\frac{1755\phi'_5}{4^5}+\frac{3978\phi'_7}{4^8}$$

$$+\frac{17901\phi'_9}{4^{11}}+\frac{139230\phi'_{11}}{4^{14}}+\frac{1345890\phi'_{13}}{4^{17}}$$

$$+\frac{14642100\phi'_{15}}{4^{20}},$$

故 $$c_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}\phi'_2-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{2^2\cdot\underline{\lvert 3}}\phi'_4$$

$$+\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{2^4\cdot\underline{\lvert 5}}\phi'_6$$

$$-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-5^2\right\}}{2^6\cdot\underline{\lvert 7}}\phi'_8$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XII)}$$

$$b_{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi'_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{3\cdot4}\phi'_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\phi'_7$$

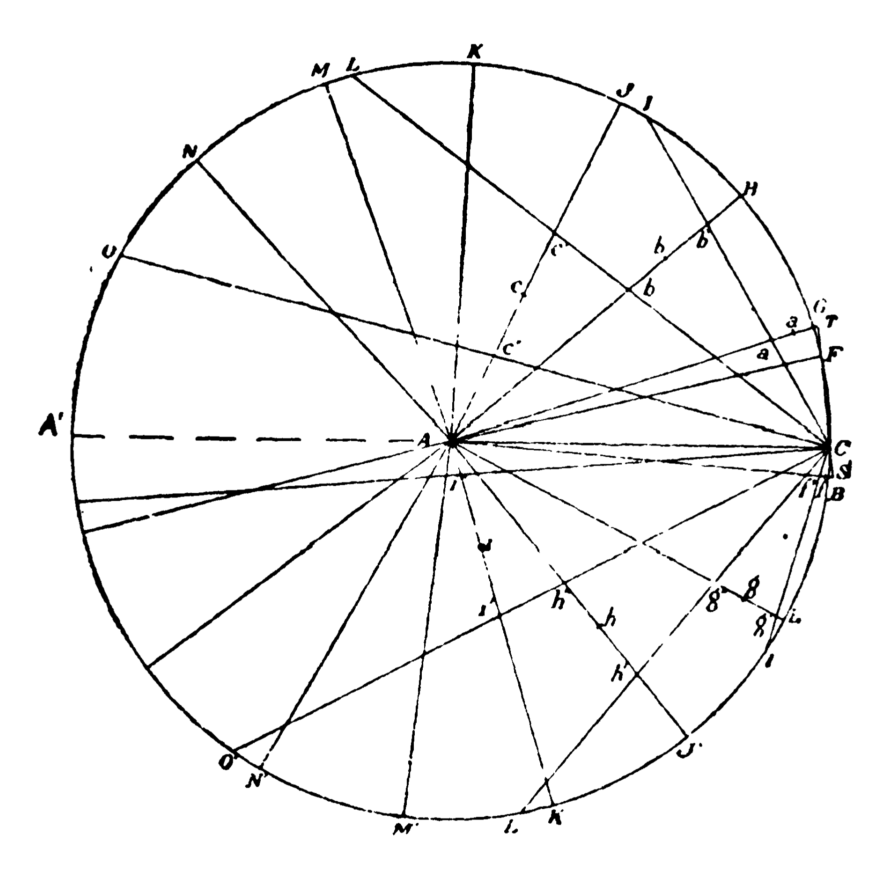
$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\phi'_9$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XIII)}$$

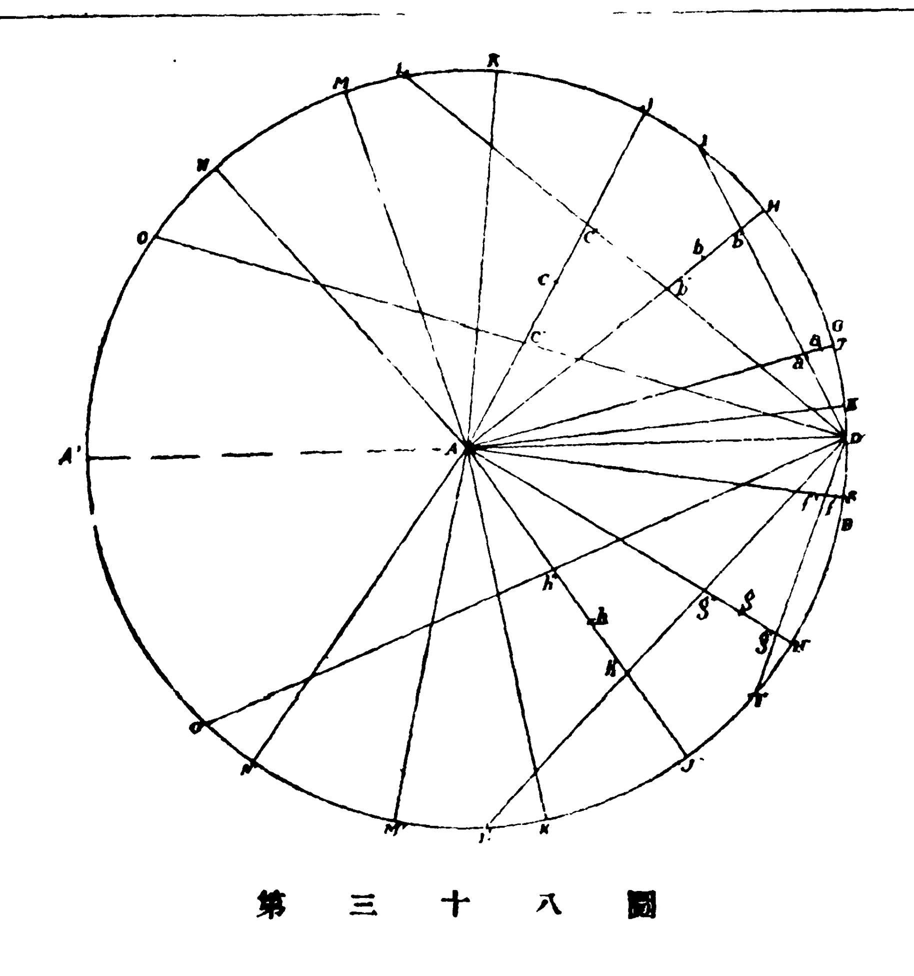
（第三：令 $\frac{n}{m}=\frac{n}{5}$）

如第三十七圖,及第三十八圖.

BG 爲本弧,各析爲 $BC\left(=\frac{BG}{5}\right)$, $CG\left(=\frac{4BG}{5}\right)$,或 $BD\left(=\frac{2BG}{5}\right)$, $DG\left(=\frac{3BG}{5}\right)$. 如前作線成相似形.又作 $\frac{3}{5},\frac{13}{5},\frac{23}{5},\frac{33}{5};\frac{7}{5},\frac{17}{5},\frac{27}{5};\frac{1}{5},\frac{11}{5},\frac{21}{5},\frac{31}{5};\frac{9}{5},\frac{19}{5},\frac{29}{5}$ 各通弦線.



第三十七圖



第三十八圖

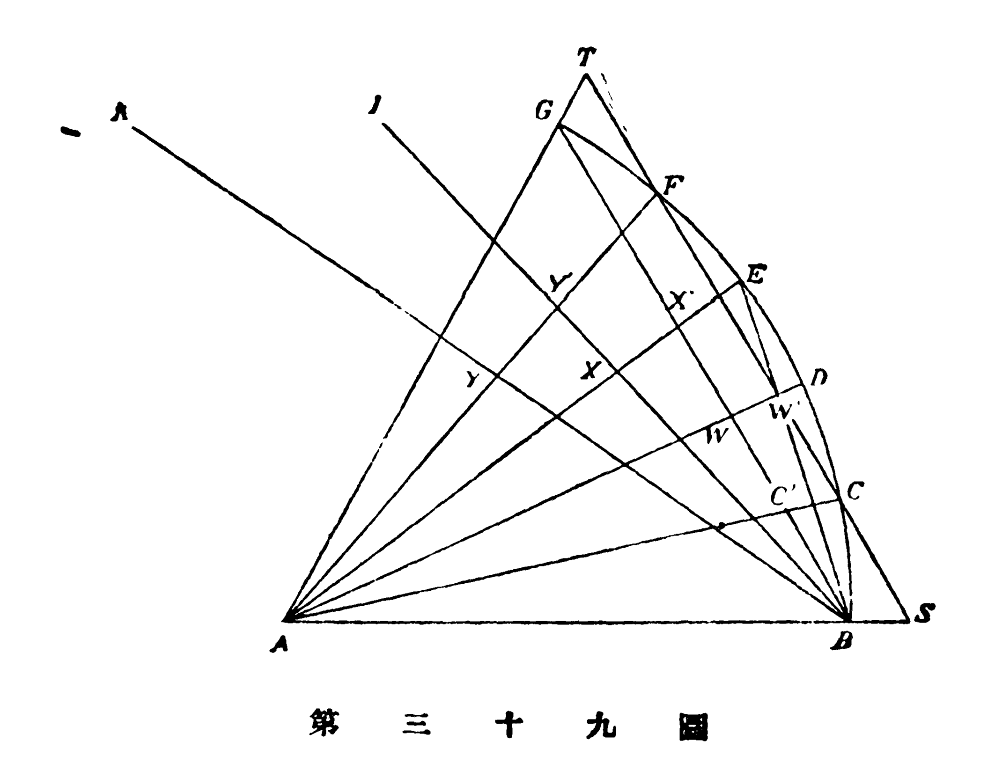
次如前用"借率法",並參觀(A)整分起度弦矢率論;附圖第三十圖,及第三十九圖.

$\frac{1}{5}$ 第一形 AST 腰 AS

$$=\frac{AW'\cdot(=AC')AB}{AW}$$

$$=\frac{(\phi_1-\phi_3)\phi_1}{\phi_1-3\phi_3+\phi_5}$$

$$=\phi_1+2\phi_3+5\phi_5+13\phi_7+34\phi_9+89\phi_{11}+233\phi_{13}$$
$$+610\phi_{15}$$



第三十九圖

又在 $\triangle BCS$ 內, $\angle BCS=\frac{2}{5}a$,

$\triangle BAW$ 內, $\angle BAW=\frac{2}{5}a$,

又 $\angle CSB=\angle WBA$

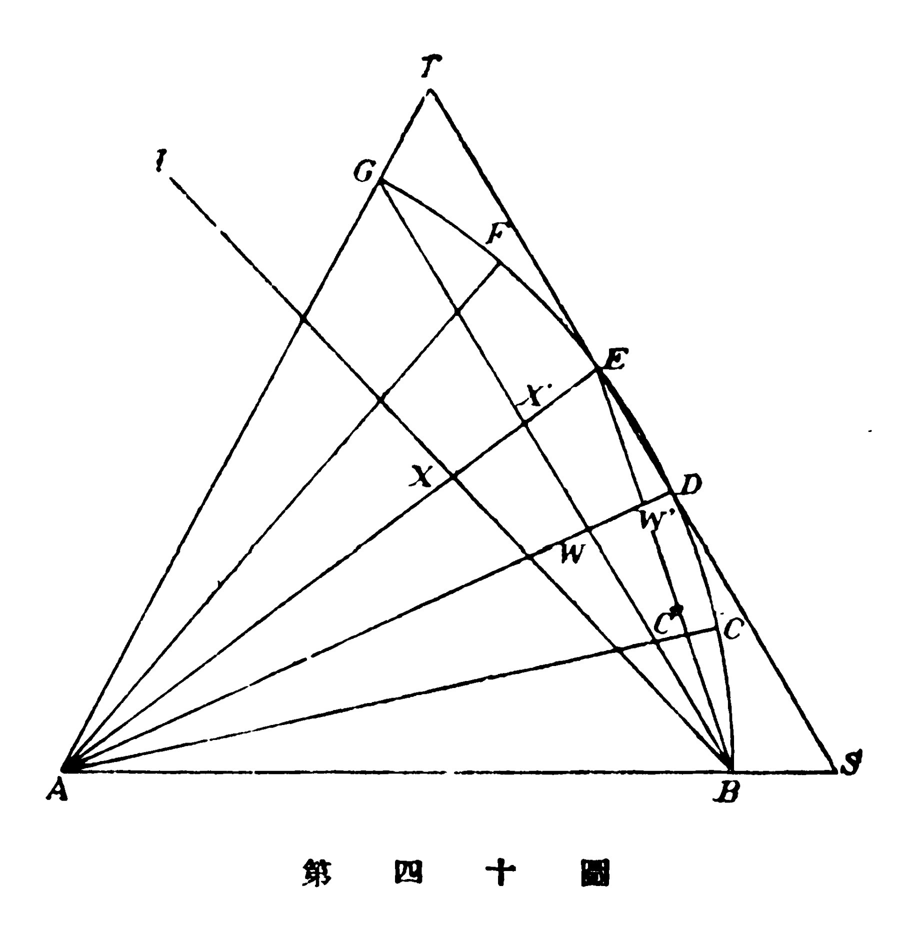
故 $\triangle_s BCS, BAW$ 爲相似三角形.

$\frac{1}{5}$ 第二形 CSf' 腰 CS

$$=\frac{AC\cdot BC}{AW}=\frac{\phi_1\cdot\phi_2}{\phi_1-3\phi_3+\phi_5}$$

$$=\phi_2+3\phi_4+8\phi_6+21\phi_8+55\phi_{10}+144\phi_{12}+377\phi_{14}+987\phi_{16}$$

次如前用"借率法",並參觀(A)整分起度弦矢率論,附圖第三十圖,及第四十圖.



第 四 十 圖

$\frac{2}{5}$第一形 AST 腰 AS

$$=\phi_1+3\phi_3+8\phi_5+21\phi_7+55\phi_9+144\phi_{11}+377\phi_{13}$$
$$+987\phi_{15}$$

$\frac{2}{5}$第二形 DSf' 腰 DS

$$=\frac{AD\cdot BW\,(=BW')}{AW}=\frac{\phi_1(3\phi_2-\phi_4)}{\phi_1-3\phi_3+\phi_5}$$

$$=2\phi_2+5\phi_4+13\phi_6+34\phi_8+89\phi_{10}+233\phi_{12}+610\phi_{14}$$
$$+1597\phi_{16}.$$

復次用“易率法”

因　$b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}$

令　$\phi'_1=\phi_1,\quad \phi'_3=b_5.$

則　$\dfrac{\phi'_3}{5^2}=\phi_3-2\phi_5+\dfrac{7\phi_7}{5}-\dfrac{2\phi_9}{5}+\dfrac{\phi_{11}}{5^2}$

$$\frac{\phi'_5}{5^4}=\phi_5-4\phi_7+\frac{34\phi_9}{5}-\frac{32\phi_{11}}{5}+\frac{81\phi_{13}}{5^2}-\frac{32\phi_{15}}{5^2},$$

$$\frac{\phi'_7}{5^6}=\phi_7-6\phi_9+\frac{81\phi_{11}}{5}-\frac{130\phi_{13}}{5}+\frac{690\phi_{15}}{5^2},$$

$$\frac{\phi'_9}{5^8}=\phi_9-8\phi_{11}+\frac{148\phi_{13}}{5}-\frac{336\phi_{15}}{5},$$

$$\frac{\phi'_{11}}{5^{10}}=\phi_{11}-10\phi_{13}+\frac{235\phi_{15}}{5},$$

$$\frac{\phi'_{13}}{5^{12}}=\phi_{13}-12\phi_{15},$$

$$\frac{\phi'_{15}}{5^{14}}=\phi_{15}.$$

故　$\dfrac{1}{5}$ 第一形腰 AS

$$=\phi_1+2\phi_3+5\phi_5+13\phi_7+34\phi_9+89\phi_{11}+233\phi_{13}$$
$$+610\phi_{15}$$

$$=\phi'_1+\frac{2\phi'_3}{5^2}+\frac{9\phi'_5}{5^4}+\frac{231\phi'_7}{5^7}+\frac{1254\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{35112\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{200564\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{1161508\phi'_{15}}{5^{16}},$$

而 $2=2,$

$$9=2\times2+5,$$

$$231=13\times5+9\times4-2\times7,$$

$$1254=34\times5+231\times6-9\times34+2\times2,$$

$$35112=89\times5^2+1254\times8\times5-231\times81+32\times9\times5$$
$$-2\times1,$$

$$200564=233\times5^2+35112\times10-1254\times148+231\times130$$
$$-9\times81,$$

$$1161508=610\times5^2+200564\times12-35112\times\frac{235}{5}$$
$$+1254\times336-231\times\frac{690}{5}+9\times32.$$

又因 $c_5=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$

$$b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}.$$

如前命 $\phi'_1=\phi_1,\quad \phi'_3=b_5,$

則 $\frac{\phi'_2}{5}=\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}.$

蓋因從定義$\phi'_1:\frac{\phi'_2}{5}=\frac{\phi'_2}{5}:\frac{\phi'_3}{5^2},$

$$\frac{\phi'_3}{5^2}=\frac{\frac{\phi'_2}{5}\cdot\frac{\phi_2'}{5}}{\phi_1}=\frac{b_5}{5^2}=\phi_3-2\phi_5+\frac{7\phi_7}{5}-\frac{2\phi_9}{5}+\frac{\phi_{11}}{5^2},$$

同理 $$\frac{\phi'_4}{5^3}=\frac{1}{\phi_1}\left\{\frac{\phi'_2}{5}\cdot\frac{\phi'_3}{5^2}\right\}=\phi_4-3\phi_6+\frac{18\phi_8}{5}-\frac{11\phi_{10}}{5}$$

$$+\frac{18\phi_{12}}{5^2}-\frac{3\phi_{14}}{5^2}+\frac{\phi_{16}}{5^3},$$

$$\frac{\phi'_6}{5^5}=\phi_6-5\phi_8+\frac{55\phi_{10}}{5}-\frac{70\phi_{12}}{5}+\frac{285\phi_{14}}{5^2}-\frac{155\phi_{16}}{5^2},$$

$$\frac{\phi'_8}{5^7}=\phi_8-7\phi_{10}+\frac{112\phi_{12}}{5}-\frac{217\phi_{14}}{5}+\frac{1421\phi_{16}}{5^2}$$

$$\frac{\phi'_{10}}{5^9}=\phi_{10}-9\phi_{12}+\frac{189\phi_{14}}{5}-\frac{492\phi_{16}}{5},$$

$$\frac{\phi'_{12}}{5^{11}}=\phi_{12}-11\phi_{14}+\frac{286\phi_{16}}{5},$$

$$\frac{\phi'_{14}}{5^{13}}=\phi_{14}-13\phi_{16},$$

$$\frac{\phi'_{16}}{5^{15}}=\phi_{16}.$$

故 $\frac{1}{5}$ 第二形腰 CS

$$=\phi_2+3\phi_4+8\phi_6+21\phi_8+55\phi_{10}+144\phi_{12}+377\phi_{14}$$

$$+987\phi_{16},$$

$$=\frac{\phi'_2}{5}+\frac{4\phi'_4}{5^3}+\frac{99\phi'_6}{5^6}+\frac{528\phi'_8}{5^8}+\frac{2926\phi'_{10}}{5^{10}}$$

$$+\frac{82992\phi'_{12}}{5^{13}}+\frac{478268\phi'_{14}}{5^{16}}+\frac{13938096\phi'_{16}}{5^{18}},$$

而　$4=3+1,$

$99=8\times5+4\times3\times5-1,$

$528=21\times5+99\times5-4\times18,$

$2926=55\times5+528+7-99\times\frac{55}{5}+4\times11,$

$82992=144\times5^2+2926\times9\times5-528\times112+99\times70$

$-4\times18,$

……………………………………………

復次用"易率法":

因　$b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11},$

令　$\phi'_1=\phi_1,\quad \phi'_3=b_5,$

如前求得 $\frac{\phi'_3}{5^2}, \frac{\phi'_5}{5^4}, \frac{\phi'_7}{5^6}, \frac{\phi'_9}{5^8}, \frac{\phi'_{11}}{5^{10}}, \frac{\phi'_{13}}{5^{12}}, \frac{\phi'_{15}}{5^{14}}.$

故 $\frac{2}{5}$ 第一形腰 AS

$$=\phi_1+3\phi_3+8\phi_5+21\phi_7+55\phi_9+144\phi_{11}+377\phi_{13}$$

$$+987\phi_{15},$$

$$=\phi'_1+\frac{3\phi'_3}{5^2}+\frac{14\phi'_5}{5^4}+\frac{364\phi'_7}{5^7}+\frac{1989\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{55913\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{320229\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{1858032\phi'_{15}}{5^{16}}.$$

又因　$c_5=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$

$$b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}$$

如前令　$\phi'_1=\phi_1$,　$\phi'_3=b_5$,

由是求得 $\frac{\phi'_2}{5}, \frac{\phi'_4}{5^3}, \frac{\phi'_6}{5^5}, \frac{\phi'_8}{5^7}, \frac{\phi'_{10}}{5^9}, \frac{\phi'_{12}}{5^{11}}, \frac{\phi'_{14}}{5^{13}}, \frac{\phi'_{16}}{5^{15}}$,

故 $\frac{2}{5}$ 第二形腰,

$$DS=2\phi_2+5\phi_4+13\phi_6+34\phi_8+89\phi_{10}+233\phi_{12}+610\phi_{14}$$
$$+1597\phi_{16}$$

$$=\frac{2\phi'_2}{5}+\frac{7\phi'_4}{5^3}+\frac{168\phi'_6}{5^6}+\frac{884\phi'_8}{5^8}+\frac{4862\phi'_{10}}{5^{10}}$$

$$+\frac{137241\phi'_{12}}{5^{13}}+\frac{788256\phi'_{14}}{5^{16}}+\frac{22915728\phi'_{16}}{5^{18}},$$

復次求得 $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ 起度各形腰底率.

由是得"五分弧之四起度各通弦率",

$$c_{\frac{3}{5}}=\frac{3\phi'_2}{5}+\frac{2\phi'_4}{5^3}+\frac{27\phi'_6}{5^6}+\frac{99\phi'_8}{5^8}+\frac{418\phi'_{10}}{5^{10}}$$

$$+\frac{9576\phi'_{12}}{5^{13}}+\frac{46284\phi'_{14}}{5^{15}}+\frac{1161508\phi'_{16}}{5^{18}},$$

$$c_{\frac{1}{5}3}=\frac{13\phi'_2}{5}-\frac{78\phi'_4}{5^3}+\frac{273\phi'_6}{5^6}-\frac{741\phi'_8}{5^8}-\frac{2717\phi'_{10}}{5^{10}}$$

$$-\frac{57305\phi'_{12}}{5^{13}}-\frac{262276\phi'_{14}}{5^{15}}-\frac{6332082\phi'_{16}}{5^{18}},$$

$$c_{\frac{2}{5}3}=\frac{23\phi'_2}{5}-\frac{483\phi'_4}{5^3}+\frac{9177\phi'_6}{5^6}-\frac{5244\phi'_8}{5^8}$$

$$+\frac{12673\phi'_{10}}{5^{10}}+\frac{215441\phi'_{12}}{5^{13}}+\frac{861764\phi'_{14}}{5^{15}}$$

$$+\frac{18958808\phi'_{16}}{5^{18}},$$

$$c_{\frac{3}{5}3}=\frac{33\phi'_2}{5}-\frac{1463\phi'_4}{5^3}+\frac{79002\phi'_6}{5^6}-\frac{218196\phi'_8}{5^8}$$

$$-\frac{103037\phi'_{10}}{5^{10}}-\frac{1095939\phi'_{12}}{5^{13}}-\frac{3400221\phi'_{14}}{5^{15}}$$

$$-\frac{63470792\phi'_{16}}{5^{18}};$$

"五分弧之四起度各倍矢率",

$$b_{\frac{4}{5}}=\frac{16\phi'_3}{5^2}+\frac{12\phi'_5}{5^4}+\frac{168\phi'_7}{5^7}+\frac{727\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{13376\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{61712\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{299744\phi'_{15}}{5^{16}},$$

$$b_{\frac{9}{5}}=\frac{81\phi'_3}{5^2}+\frac{378\phi'_5}{5^4}-\frac{1297\phi'_7}{5^7}-\frac{3078\phi'_9}{5^9}$$

$$-\frac{54549\phi'_{11}}{5^{12}}-\frac{224828\phi'_{13}}{5^{14}}-\frac{1011636\phi'_{15}}{5^{16}},$$

$$b_{\frac{14}{5}}=\frac{196\phi'_3}{5^2}-\frac{2793\phi'_5}{5^4}+\frac{44688\phi'_7}{5^7}+\frac{23142\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{262276\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{852397\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{3297184\phi'_{15}}{5^{16}},$$

又"五分弧之一起度各通弦率",

$$c_{\frac{7}{5}}=\frac{7\phi'_2}{5}-\frac{7\phi'_4}{5^3}-\frac{77\phi'_6}{5^6}-\frac{264\phi'_8}{5^8}-\frac{1078\phi'_{10}}{5^{10}}$$

$$-\frac{24206\phi'_{12}}{5^{13}}-\frac{115444\phi'_{14}}{5^{15}}-\frac{2869608\phi'_{16}}{5^{18}},$$

$$c_{\frac{17}{5}}=\frac{17\phi'_2}{5}-\frac{187\phi'_4}{5^3}+\frac{748\phi'_6}{5^6}+\frac{1496\phi'_8}{5^8}$$

$$+\frac{4862\phi'_{10}}{5^{10}}+\frac{95914\phi'_{12}}{5^{13}}+\frac{420546\phi'_{14}}{5^{15}}$$

$$+\frac{9852792\phi'_{16}}{5^{18}},$$

$$c_{\frac{27}{5}}=\frac{27\phi'_2}{5}-\frac{792\phi'_4}{5^3}+\frac{24948\phi'_6}{5^6}-\frac{15444\phi'_8}{5^8}$$

$$-\frac{26598\phi'_{10}}{5^{10}}-\frac{391716\phi'_{12}}{5^{13}}-\frac{1441314\phi'_{14}}{5^{15}}$$

$$、\frac{29993058\phi'_{16}}{5^{18}},$$

"五分弧之一起度各倍矢率",

$$b_{\frac{1}{5}}=\frac{\phi'_3}{5^2}+\frac{2\phi'_5}{5^4}+\frac{33\phi'_7}{5^7}+\frac{132\phi'_9}{5^9}+\frac{2926\phi'_{11}}{5^{12}}$$

$$+\frac{13832\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{68324\phi'_{15}}{5^{16}},$$

$$b_{\frac{6}{5}}=\frac{36\phi'_3}{5^2}-\frac{33\phi'_5}{5^4}-\frac{352\phi'_7}{5^7}-\frac{1188\phi'_9}{5^9}$$

$$-\frac{24024\phi'_{11}}{5^{12}}-\frac{107198\phi'_{13}}{5^{14}}-\frac{508896\phi'_{15}}{5^{16}},$$

$$b_{\frac{11}{5}}=\frac{121\phi'_3}{5^2}-\frac{968\phi'_5}{5^4}+\frac{3388\phi'_7}{5^7}+\frac{6292\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{97526\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{372372\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{1593834\phi'_{15}}{5^{16}}.$$

同理,得$\frac{3}{5}$,$\frac{2}{5}$弧起度各通弦及各倍矢率.

故 $$c_{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)\phi'_2-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{2^2\cdot\underline{|3}}\phi'_4$$

$$+\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{2^4\cdot\underline{|5}}\phi'_6$$

$$-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-5^2\right\}}{2^6\cdot\underline{|7}}\phi'_8$$

$$+\cdots\cdots; \qquad \text{(XII)}$$

$$b_{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi'_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{3\cdot4}\phi'_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\phi'_7$$

$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\phi'_9$$

$$+\cdots\cdots. \qquad \text{(XIII)}$$

以上見項名達象數一原卷三.

* * *

(*D*) 零分起度弦矢率論.

按連比例定理,

$$\phi'_1:\phi'_2=\phi'_2:\phi'_3,$$

令 $$\phi'_3=b_m,$$

則 $$\phi'_1:\phi'_2=\phi'_2:b_m$$

而 $$\phi'_2=c_m,$$

故(XII), (XIII)二式可改書爲:

$$c_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}c_m-\frac{n(n^2-m^2)(c_m)^3}{4\cdot\underline{|3}\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot3^2)(c_m)^5}{4^2\underline{|5}\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(n^2-m^2\cdot 5^2)(c_m)^7}{4^3\cdot\lfloor\underline{7}\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\cdots\cdots, \tag{XIV}$$

$$b_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}b_m-\frac{n^2(n^2-m^2)(b_m)^2}{3\cdot 4\cdot m^4\cdot r}+\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(b_m)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ m^6\cdot r^2}$$

$$-\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot m^8\cdot r^4}+\cdots\cdots, \tag{XV}$$

項名達逐次令 $\frac{n}{m}=\frac{n}{2},\frac{n}{3},\frac{n}{4},\frac{n}{5}$ 以證(XII),(XIII)二式之眞確,卷四寫成四紙,因病未續,其後戴煦續成此卷,爲演(XIV),(XV)二式,如上所舉.

以上見項名達象數一原卷四.

(*E*) 諸術通詮.

象數一原卷五,先以(XV)式化爲:

$$\text{vers}\frac{n}{m}a=\frac{n^2(2\ \text{vers}\ m\ a)}{\lfloor\underline{2}\cdot m^2}-\frac{n^2(n^2-m^2)\ (2\ \text{vers}\ m\ a)^2}{\lfloor\underline{4}\cdot m^4\cdot r}$$

$$-\frac{n^2(n^2-m^2)\ (n^2-m^2\cdot 2^2)\ (2\,\text{vers}\,m\,a)^3}{\lfloor\underline{6}\ m^6\ r^2}$$

$$-\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(2\,\text{vers}\,m\,a)^4}{\lfloor\underline{8}\cdot m^8\cdot r^3}$$

$$+\cdots\cdots. \tag{XVI}$$

項氏以(XIV),(XV)或(XVI)爲本術,

令　$r=1,$

$c_m=2\sin 30^\circ=1,$

而　$m=30^\circ;$

$b_m=2\text{ vers }60^\circ=1,$

而　$m=60^\circ;$

變通爲下之二術:

$$\sin n=\frac{n}{60}\left\{1+\frac{(30^2-n^2)}{\underline{|3}\cdot(60)^2}+\frac{(30^2-n^2)(9\times30^2-n^2)}{\underline{|5}\cdot(60)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{(30^2-n^2)(9\times30^2-n^2)(25\times30^2-n^2)}{\underline{|7}\cdot(60)^6}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\text{vers }n=\frac{n^2}{2(60)^2}\left\{1+\frac{(2^2\cdot30^2-n^2)}{3\cdot4\cdot(60)^2}+\frac{(2^2\cdot30^2-n^2)(4^2\cdot30^2-n^2)}{3\cdot4\cdot5\cdot6(60)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{(2^2\cdot30^2-n^2)(4^2\cdot30^2-n^2)(6^2\cdot30^2-n^2)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot(60)^6}+\cdots\cdots\right\}$$

又由(XIV),(XV)二式,容易證得董氏四術:

$$c_m=mc-\frac{m(m^2-1^2)c^3}{4\cdot\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)c^5}{4^2\cdot\underline{|5}\cdot r^4}$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{4^3\cdot\underline{|7}\cdot r^6}+\cdots\cdots,\qquad\text{(X)}$$

$$b_m=m^2b-\frac{m^2(m^2-1^2)b^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)b^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\,r^2}$$

$$-\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)(m^2-3^2)b^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\,r^3}+\cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers} ma=m^2(\operatorname{vers} a)-\frac{m^2(4m^2-4)\cdot2\cdot(\operatorname{vers} a)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)\cdot2^2\cdot(\operatorname{vers} a)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$

$$-\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)(4m^2-25)\cdot2^3\cdot(\operatorname{vers} a)^4}{4^3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XI)}$$

$$c_{\frac{1}{m}}=\frac{c}{m}+\frac{(m^2-1)c^3}{4\cdot\lfloor 3\ m^3\cdot r^2}+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{4^2\lfloor 5\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\cdots\cdots, \qquad (X)_a$$

$$b_{\frac{1}{m}}=\frac{b}{m^2}+\frac{(m^2-1)b^2}{3\cdot4\cdot m^4\cdot r}+\frac{(m^2-1)(2\cdot m^2-1)b^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}$$

$$+\frac{(m^2-1)(2^2\cdot m^2-1)(3^2\cdot m^2-1)b^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot m^8\cdot r^3}+\cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers}\frac{1}{m}a=\frac{(\operatorname{vers} a)}{m^2}+\frac{(4m^2-4)\cdot2\cdot(\operatorname{vers} a)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot m^4\cdot r}$$

$$+\frac{(4m^2-4)(4\cdot4\cdot m^2-4)\cdot2^2\cdot(\operatorname{vers} a)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}$$

$$+\frac{(4\cdot m^2-4)(4\cdot 4m^2-4)(9\cdot 4m^2-4)2^3\cdot(\text{vers }a)^4}{4^3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot m^8\cdot r^8}$$

$$+\cdots\cdots. \qquad (\text{XI})_a.$$

又由(XIV),(XV)二式,可證杜氏九術:

前由董氏(X),(XI)二式,已證如杜氏之(IV),(V)及(II),(III)四式,玆不復贅述.

此外(VI)式,"通弦求通弧",則由前之$(\text{X})_a$式,令$m=\infty$,則$c_{\frac{1}{m}}$爲無窮細,而與弧合,而(m^2-1),$(2^2\cdot m^2-1)$,$(3^2\cdot m^2-1)$,…… 等甚近於m^2, $2^2\cdot m^2$, $3^2\cdot m^2$,…… 故$(\text{X})_a$式可變爲:

$$c_{\frac{1}{m}}=\frac{c}{m}+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot\underline{|3}\cdot m\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\cdot\underline{|5}\cdot m\cdot r^4}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\cdot\underline{|7}\cdot m\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

或

$$2a=m\cdot c_{\frac{1}{m}}=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\cdot\underline{|5}\cdot r^4}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\cdot\underline{|7}\cdot r^6}+\cdots\cdots, \qquad (\text{VI})$$

同理得(VII).

其(IX)式,"矢求通弧"則由$(\text{XI})_a$式,令$m=\infty$,則$(4m^2-4)$, $(4\cdot 4m^2-4)$, $(9\cdot 4m^2-4)$,……等甚近於$4m^2$,

$4\cdot 4m^2, 9\cdot 4m^2, \cdots\cdots$,故(XI)$_a$式可變爲:

$$\operatorname{vers}\frac{1}{m}a=\frac{(2\operatorname{vers}a)}{\lfloor\underline{2}\cdot m^2}+\frac{(2\operatorname{vers}a)^2}{\lfloor\underline{4}\cdot \mathrm{m}^2\cdot \mathrm{r}}+\frac{2^2\cdot(2\operatorname{vers}a)^3}{\lfloor\underline{6}\cdot m^2\cdot \mathrm{r}^2}$$

$$+\frac{2^2\cdot 3^2\cdot(2\operatorname{vers}a)^4}{\lfloor\underline{8}\cdot m^2\cdot \mathrm{r}^8}+\cdots\cdots,$$

因 $r:c_{\frac{1}{m}}=c_{\frac{1}{m}}:b_{\frac{1}{m}}$ 之關係,上式左邊可書爲: $\frac{\left(c_{\frac{1}{m}}\right)^2}{2\cdot r}$,

兩邊再各乘 $4\,m^2$,化得

$$(2a)^2=r\left\{(8\operatorname{vers}a)+\frac{1^2(8\operatorname{vers}a)}{4\cdot 3\cdot 4\cdot r}\right.$$

$$\left.+\frac{1^2\cdot 2^2(8\operatorname{vers}a)^3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}+\cdots\cdots\right\} \qquad \text{(IX)}.$$

同理得(VIII).

至(I)式,"圜徑求周"乃由(VI)式推得,前已述及,可不復贅,以上并見項名達象數一原卷五.

(*F*)諸術明變

"諸術明變"中,著下列正弦求各線,餘弦求各線式:

$$\tan a=\sin a+\frac{\sin^3 a}{2\cdot r^2}+\frac{3\cdot\sin^5 a}{2\cdot 4\cdot r^4}+\frac{3\cdot 5\sin^7 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^6}$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\sin^9 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

$$\sec\ a = r + \frac{\sin^2 a}{2\cdot r} + \frac{3\cdot\ \sin^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3} + \frac{3\cdot 5\cdot\ \sin^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}$$

$$+ \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ \sin^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7} + \cdots\cdots,$$

$$\text{vers}\ a = \frac{\sin^2 a}{2\cdot r} + \frac{\sin^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3} + \frac{3\sin^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5} + \frac{3\cdot 5\cdot\ \sin^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}$$

$$+ \cdots\cdots,$$

$$\cos\ a = r - \left\{ \frac{\sin^2 a}{2\cdot r} + \frac{\sin^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3} + \frac{3\cdot\ \sin^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5} \right.$$

$$\left. + \frac{3\cdot 5\cdot\ \sin^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7} + \cdots\cdots \right\},$$

$$\csc\ a = \frac{r^2}{\sin a},$$

$$\cot\ a = \frac{r^2}{\sin a} - \left\{ \frac{\sin a}{2} + \frac{\sin^3 a}{2\cdot 4\cdot r^2} + \frac{3\cdot\ \sin^5 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^4} \right.$$

$$\left. + \frac{3\cdot 5\cdot\ \sin^7 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^6} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ \sin^9 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot r^8} + \cdots\cdots \right\};$$

*　　　*　　　*

$$\cot\ a = \cos\ a + \frac{\cos^3 a}{2\cdot r^2} + \frac{3\cos^5 a}{2\cdot 4\cdot r^4} + \frac{3\cdot 5\cdot\ \cos^7 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^6}$$

$$+ \frac{3\cdot 5\cdot 7\cos^9 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^8} + \cdots\cdots,$$

$$\csc\ a=r+\frac{\cos^2 a}{2\,r}+\frac{3\cos^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3}+\frac{3\cdot 5\cos^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cos^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

$$\sin\ a=r-\left\{\frac{\cos^2 a}{2\cdot r}+\frac{\cos^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3}+\frac{3\cos^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}\right.$$

$$\left.+\frac{3\cdot 5\cdot\cos^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}+\cdots\cdots\right\},$$

$$\text{covers}\ a=\frac{\cos^2 a}{2\cdot r}+\frac{\cos^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3}+\frac{3\cos^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}+\frac{3\cdot 5\cdot\cos^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}$$

$$+\cdots\cdots,$$

$$\sec\ a=\frac{r^2}{\cos a},$$

$$\tan\ a=\frac{r^2}{\cos a}-\left\{\frac{\cos a}{2}+\frac{\cos^3 a}{2\cdot 4\cdot r^2}+\frac{3\cos^5 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^4}\right.$$

$$\left.+\frac{3\cdot 5\cdot\cos^7 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cos^9 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot r^8}+\cdots\cdots\right\}.$$

項名達又因橢圓求周術,變通得"圜周求徑"術,如:

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1^2}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}-\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\cdots\cdots,$$

或　$$d=\frac{\pi d}{2}\left\{1-\frac{1}{2^2}-\frac{(2^2-1)}{2^2\cdot 4^2}-\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\right.$$

$$-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}-\cdots\cdots\Big\}$$

項氏自謂此級數,斂級頗難,不足爲術也.以上幷見項名達象數一原卷六.

18. 戴煦之求表捷術

戴煦,字鄂士,錢塘人,(1805-1860)自道光乙巳(1845)至咸豐壬子(1852),凡八易寒暑,演錄對數簡法,外切密率,假數測圓三種,總名曰求表捷術.戴煦曾校補項名達遺著象數一原已詳前節.其外切密率則因杜氏僅求弦矢,徐有壬有切線弧背互求二術,而於割線尚未全,嘗以此意告項名達,幷爲推演,以示項氏,未及半而項氏卒,辛亥(1851)見李善蘭,由李示以對數探源,弧矢啓祕,幷促成其說,因於咸豐壬子(1852)寫定.以切割二線出於圓外,故名曰外切密率,凡四卷:

卷一　本弧求切線術解.　餘弧求切線術解.
　　　弧背求切線算式.

卷二　本弧求割線術解.　餘弧求割線術解.
　　　弧背求割線算式.

卷三　切線求本弧術解.　切線求餘弧術解.

切線求距弧術解. 切線求弧背算式.

卷四 割線求本弧術解. 割線求餘弧術解.

割線求半弧術解. 割線求倍弧術解.

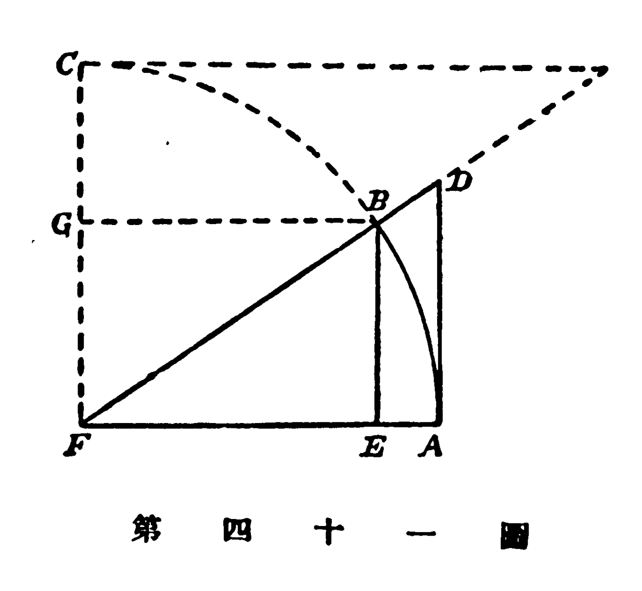
割線求弧背算式.

* * *

(1)本弧求切線:

$$\tan\alpha=\alpha+\frac{2\alpha^{3}}{\underline{|3}\cdot r^{2}}+\frac{16\,\alpha^{5}}{\underline{|5}\cdot r^{4}}+\frac{272\,\alpha^{7}}{\underline{|7}\cdot r^{6}}+\frac{7936\,\alpha^{9}}{\underline{|9}\cdot r^{8}}+\cdots,\quad (1)$$

如第四十一圖 $AB=\alpha$ 爲本弧, $BC=90-\alpha$ 爲餘弧,



第四十一圖

$$DA=\tan\alpha,$$

$$BE=\sin\alpha,$$

$$FE=\cos\alpha,$$

因

$$FE:BE=FA:DA,$$

卽 $$\cos a : \sin a = r : \tan a,$$

$$1 - \text{vers } a : \sin a = r : \tan a,$$

由(II),(III)得,

$$\tan a = \frac{r\left(a - \frac{a^3}{\lfloor 3 \cdot r^2} + \frac{a^5}{\lfloor 5 \cdot r^4} - \frac{a^7}{\lfloor 7 \cdot r^6} + \frac{a^9}{\lfloor 9 \cdot r^8} - \cdots\cdots\right)}{\left(r - \frac{a^2}{\lfloor 2 \cdot r} + \frac{a^4}{\lfloor 4 \cdot r^3} - \frac{a^6}{\lfloor 6 \cdot r^5} + \frac{a^8}{\lfloor 8 \cdot r^7} - \cdots\cdots\right)},$$

因 $$r = \phi_1,\ a = a_2,$$

故 $$\frac{a^2}{r} = \phi_3,\ \frac{a^3}{r^2} = a_4, \cdots\cdots,$$

前式化爲:

$$\tan a = \frac{\phi_1\left(\phi_2 - \frac{\phi_4}{\lfloor 3} + \frac{\phi_6}{\lfloor 5} - \frac{\phi_8}{\lfloor 7} + \frac{\phi_{10}}{\lfloor 9} - \cdots\cdots\right)}{\left(\phi_1 - \frac{\phi_3}{\lfloor 2} + \frac{\phi_5}{\lfloor 4} - \frac{\phi_7}{\lfloor 6} + \frac{\phi_9}{\lfloor 8} - \cdots\cdots\right)},$$

以上分母子按代數除法除得,

$$\tan a = \phi_2 + \frac{2\phi_4}{\lfloor 3} + \frac{16\phi_6}{\lfloor 5} + \frac{272\phi_8}{\lfloor 7} + \frac{7936\phi_{10}}{\lfloor 9} + \cdots\cdots,$$

$$= a + \frac{2a^3}{\lfloor 3 \cdot r^2} + \frac{16a^5}{\lfloor 5 \cdot r^4} + \frac{272a^7}{\lfloor 7 \cdot r^6} + \frac{7936a^9}{\lfloor 9 \cdot r^8} + \cdots,$$ 證訖

(2) 餘弧求切線:

$$\tan a = \frac{r^2}{\frac{\pi}{2} - a} - \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\lfloor 3} - \frac{8\left(\frac{\pi}{2} - a\right)^3}{3\lfloor 5 \cdot r^2}$$

$$-\frac{32\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\lfloor\underline{7}\cdot r^4}-\frac{1152\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot5\cdot\lfloor\underline{9}\cdot r^6}-\cdots\cdots, \quad (2)$$

如前圖 $BG:GF=FA:DA$,

即 $$\sin(90^\circ-a):\cos(90^\circ-a)=r:\tan a,$$

$$\tan a=\frac{r\left\{r-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^2}{\lfloor\underline{2}\cdot r}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^4}{\lfloor\underline{4}\cdot r^3}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^6}{\lfloor\underline{6}\cdot r^5}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^8}{\lfloor\underline{8}\cdot r^7}-\cdots\cdots\right\}}{\left\{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{\lfloor\underline{3}\cdot r^2}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{\lfloor\underline{5}\cdot r^4}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{\lfloor\underline{7}\cdot r^6}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^9}{\lfloor\underline{9}\cdot r^8}-\cdots\cdots\right\}},$$

令 $r=\phi_2,\ \frac{\pi}{2}-a=\phi_3$,

則 $$\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^2}{r}=\phi_4,\ \frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{r^2}=\phi_5,\ \frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^4}{r^3}=\phi_6,\ \frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{r^4}=\phi_7,\ \frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{r^6}=\phi_9,$$

$\cdots\cdots$,

代入化得:

$$\tan a=\frac{\phi_2\left(\phi_2-\frac{\phi_4}{2!}+\frac{\phi_6}{4!}-\frac{\phi_8}{6!}+\frac{\phi_{10}}{8!}-\cdots\cdots\right)}{\left(\phi_3-\frac{\phi_5}{3!}+\frac{\phi_7}{5!}-\frac{\phi_9}{7!}+\frac{\phi_{11}}{9!}-\cdots\cdots\right)},$$

$$=\phi_1-\frac{2\phi_3}{3!}-\frac{8\phi_5}{3\cdot 5!}-\frac{32\phi_7}{3\cdot 7!}-\frac{1152\phi_9}{3\cdot5\cdot 9!}-\cdots\cdots$$

$$=\frac{r^2}{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{3!}-\frac{8\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{3\cdot 5!\cdot r^2}$$

$$-\frac{32\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\cdot 7!\cdot r^4}-\frac{1152\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot5\cdot 9!\cdot r^6}-\cdots\cdots,$$

證訖.

以上見戴煦外切密率卷一.

(3)本弧求割線:

$$\sec a-r=\frac{a^2}{2!\cdot r}+\frac{5a^4}{4!\cdot r^3}+\frac{61a^6}{6!\cdot r^5}+\frac{1385a^8}{8!\cdot r^7}$$

$$+\frac{50521a^{10}}{10!\cdot r^9}+\cdots\cdots, \qquad (3)$$

如圖 $AB=a$ 爲本弧, $BC=\frac{\pi}{2}-a$ 爲餘弧,

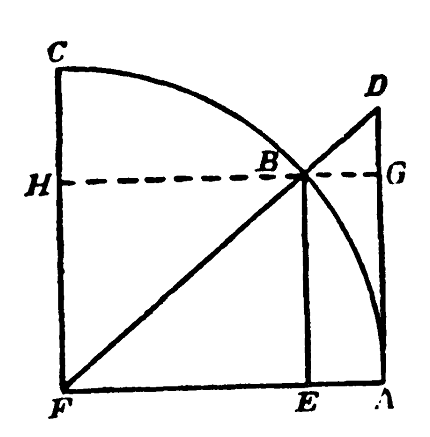
$FD=\sec\ a,$

$BD=\sec\ a-r,$

$EF=\cos\ a,$

$EA=BG=\text{vers}\ a,$

$FB=r.$



第四十二圖

因 $\quad EF:FB=BG:BD,$

即 $\quad \cos a:r=\text{vers}\,a:(\sec a-r)$

$$\sec\ a-r=\frac{r\left(\dfrac{a^2}{\underline{|2}\cdot r}-\dfrac{a^4}{\underline{|4}\cdot r^3}+\dfrac{a^6}{\underline{|6}\cdot r^5}-\dfrac{a^8}{\underline{|8}\cdot r^7}+\cdots\right)}{\left(r-\dfrac{a^2}{\underline{|2}\cdot r}+\dfrac{a^4}{\underline{|4}\cdot r^3}-\dfrac{a^6}{\underline{|6}\cdot r^5}+\dfrac{a^8}{\underline{|8}\cdot r^7}-\cdots\right)},$$

令 $\quad r=\phi_1,\ a=\phi_2,\ \dfrac{a^2}{r}=\phi_3,\cdots\cdots,$

代入化得:

$$\sec\ a-r=\frac{\phi_1\left(\dfrac{\phi_3}{\underline{|2}}-\dfrac{\phi_5}{\underline{|4}}+\dfrac{\phi_7}{\underline{|6}}-\dfrac{\phi_9}{\underline{|8}}+\cdots\cdots\right)}{\left(\phi_1-\dfrac{\phi_3}{\underline{|2}}+\dfrac{\phi_5}{\underline{|4}}-\dfrac{\phi_7}{\underline{|6}}+\dfrac{\phi_9}{\underline{|8}}-\cdots\cdots\right)},$$

$$=\frac{\phi_3}{\underline{|2}}+\frac{5\phi_5}{\underline{|4}}+\frac{61\phi_7}{\underline{|6}}+\frac{1385\phi_9}{\underline{|8}}+\frac{50521\phi_{11}}{\underline{|10}}+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{a^2}{\underline{|2}\cdot r}+\frac{5a^4}{\underline{|4}\cdot r^3}+\frac{61a^6}{\underline{|6}\cdot r^5}+\frac{1385\,a^8}{\underline{|8}\cdot r^7}+\frac{50521\,a^{10}}{\underline{|10}\cdot r^9}$$

$$+\cdots\cdots.$$

證訖.

(4)餘弧求割線:

$$\sec a=\frac{r^2}{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\underline{|3}}+\frac{7\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{3\cdot\underline{|5}\cdot r^2}$$

$$+\frac{31\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\cdot\underline{|7}\cdot r^4}+\frac{1142\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot5\cdot\underline{|9}\cdot r^6}+\cdots, \qquad (4)$$

如前圖 $HB:FB=FA:FD,$

$$\sin(90-a):r=r:\sec a.$$

$$\sec a=r^2\div\left\{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{\underline{|5}\cdot r^4}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{\underline{|7}\cdot r^6}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^9}{\underline{|9}\cdot r^8}-\cdots\cdots\right\},$$

令 $r^2=\phi_2,\ \frac{\pi}{2}-a=\phi_3,\ \frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{r}=\phi_4,\cdots\cdots,$

代入化得:

$$\sec a=\frac{\phi_4}{\phi_3-\frac{\phi_5}{\underline{|3}}+\frac{\phi_7}{\underline{|5}}-\frac{\phi_9}{\underline{|7}}+\frac{\phi_{11}}{\underline{|9}}-\cdots\cdots},$$

$$=\phi_1+\frac{\phi_3}{\underline{|3}}+\frac{7\phi_5}{3\underline{|5}}+\frac{31\phi_7}{3\underline{|7}}+\frac{1142\phi_9}{3\cdot5\cdot\underline{|9}}+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{r^2}{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\lfloor\underline{3}}+\frac{7\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{3\cdot\lfloor\underline{5}\cdot r^2}$$

$$+\frac{31\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\cdot\lfloor\underline{7}\cdot r^4}+\frac{1142\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot 5\lfloor\underline{9}\cdot r^6}+\cdots\cdots.$$

證訖.

以上見戴煦外切密率卷二.

(5)切線求本弧:

$$a=\tan\ a-\frac{\tan^3 a}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5 a}{5\cdot r^4}-\frac{\tan^7 a}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots, \qquad (5)$$

凡連比例率分,皆可還原,

由(I):

$$\phi'_2=\tan\ a=\phi_2+\frac{2\phi_4}{\lfloor\underline{3}}+\frac{16\phi_6}{\lfloor\underline{5}}+\frac{272\phi_8}{\lfloor\underline{7}}+\frac{7936\phi_{10}}{\lfloor\underline{9}}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}=\phi_3+\frac{4\phi_5}{\lfloor\underline{3}}+\frac{136\phi_7}{3\cdot\lfloor\underline{5}}+\frac{992\phi_9}{\lfloor\underline{7}}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}=\phi_4+\frac{6\phi_6}{\lfloor\underline{3}}+\frac{264\phi_8}{3\cdot\lfloor\underline{5}}+\frac{7040\phi_{10}}{3\cdot\lfloor\underline{7}}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_6=\phi_6+\frac{10\phi_8}{\lfloor\underline{3}}+\frac{640\phi_{10}}{3\cdot\lfloor\underline{5}}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_8=\phi_8+\frac{14\phi_{10}}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_{10}=\phi_{10}+\cdots\cdots,$$

齊其級數,化而併之,得:

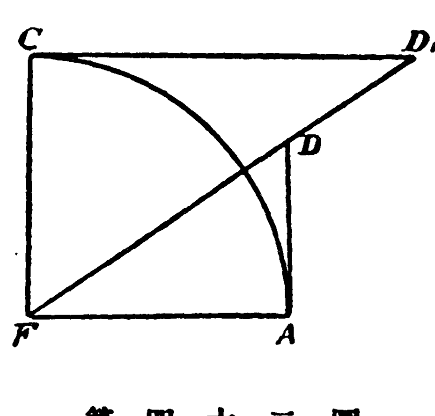
$$a=\tan a-\frac{\tan^3 a}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5 a}{5\cdot r^4}-\frac{\tan^7 a}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots. \qquad \text{證訖.}$$

(6)切線求餘弧:

$$\frac{\pi}{2}-a=r^2\div\left(\tan a+\frac{2r^2}{\lfloor 3 \tan a}-\frac{32r^4}{3\cdot\lfloor 5 \tan^3 a}\right.$$

$$\left.+\frac{704r^6}{3\cdot\lfloor 7 \tan^5 a}-\cdots\cdots\right),$$

切線求餘弧,若依切線求本弧還原法入之,反不適用,乃另用下法求之.如第四十三圖



第四十三圖

$$CD_1:CF=FA:DA,$$

即 $\tan(90°-a):r=r:\tan a$

則 $\tan a=\dfrac{r^2}{\tan(90°-a)}$;

又從杜氏(V)式知:

$$\frac{\dfrac{r_2}{\tan a-\dfrac{\tan^3 a}{3r^2}+\dfrac{\tan^5 a}{5r^4}-\dfrac{\tan^7 a}{7r^6}+\cdots\cdots}}{r}=\frac{r}{a},$$

可成爲四率比例,

令 $r=\phi_2$, $\tan a=\phi_3$,

則 $$\frac{r^2}{\tan \alpha}=\phi_1,$$

上式可書爲:

$$\frac{\dfrac{\phi_2\cdot\phi_2}{\phi_3-\dfrac{\phi_5}{3}+\dfrac{\phi_7}{5}-\dfrac{\phi_9}{7}+\cdots\cdots}}{r}=\frac{r}{a},$$

按商除法除得:

$$\frac{\left(\phi_1+\dfrac{2\phi_3}{\lfloor 3}-\dfrac{32\phi_5}{3\cdot\lfloor 5}+\dfrac{704\phi_7}{3\cdot\lfloor 7}-\cdots\cdots\right)}{r}=\frac{r}{a},$$

如令 $r=\phi_2,\ \dfrac{r^2}{\tan(90°-\alpha)}=\phi_1=\tan\ \alpha,$

則 $$\phi_3=\frac{r^2}{\tan\alpha},\ \phi_5=\frac{r^4}{\tan^3\alpha},\ \phi_7=\frac{r^6}{\tan^5\alpha}\cdots\cdots,$$

而上式之第四率,應改書爲$\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)$,故

$$\frac{\tan\ \alpha+\dfrac{2\,r^2}{\lfloor 3\ \tan\alpha}-\dfrac{32\,r^4}{3\cdot\lfloor 5\ \tan^3\alpha}+\dfrac{704\,r^6}{3\cdot\lfloor 7\ \tan^5\alpha}-\cdots}{r}=\frac{r}{\dfrac{\pi}{2}-a}.$$

證訖.

以上見戴煦外切密率卷三.

(7) 割線求本弧:

$$a^2=r\left\{2(\sec a-r)-\frac{5\cdot 2^2(\sec a-r)^2}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{64\cdot 2^3(\sec a-r)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1560\cdot 2^4(\sec a-r)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\},\qquad (7).$$

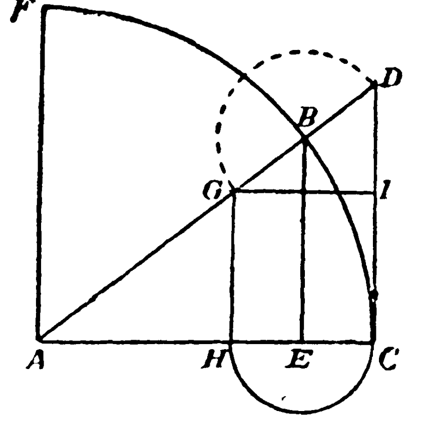
如第四十四圖 $BC=a$ 為本弧, $AD=\sec a$,

$BD=\sec a-r$,

$GD=2(\sec a-r)$,

而 $HC=2\text{ vers } a$,

故 $\sec a:r=2(\sec a-r):2\text{ vers } a$.



第四十四圖

令 $\phi_1=r_1,\ \phi_3=2(\sec a-r)$,

則 $\sec a=\phi_1+\frac{1}{2}\phi_3$,

故 $$\phi'_3=2\text{vers } a=\frac{\phi_1\cdot\phi_3}{\phi_1+\frac{\phi_3}{2}}=\phi_3-\frac{\phi_5}{2}+\frac{\phi_7}{2^2}-\frac{\phi_9}{2^3}+\frac{\phi_{11}}{2^4}-\cdots,$$

$$\phi'_5=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{\phi_1}=\frac{(2\text{ vers } a)^2}{r}=\phi_5-\frac{2\phi_7}{2}+\frac{2\phi_9}{2^2}-\frac{4\phi_{11}}{2^3}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_7=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{\phi_1}=\frac{(2\text{ vers } a)^3}{r^2}=\phi_7-\frac{3\phi_9}{2}+\frac{6\phi_{11}}{2^2}-\cdots\cdots,$$

$$\phi'_9=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_7}{\phi_1}=\frac{(2\text{ vers } a)^4}{r^3}=\phi_9-\frac{4\phi_{11}}{2}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_{11}'=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_9}{\phi_1}=\frac{(2\text{ vers } a)^5}{r^4}=\phi_{11}-\cdots\cdots,$$

由(VIII)式

$$a^2=r\left\{(2\text{ vers }a)+\frac{1^2(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{1^2\cdot2^2(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2(2\text{ vers }a)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\},$$

得
$$a^2=r\left\{2(\sec a-r)\frac{5\cdot2^2(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{64\cdot2^3(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1560\cdot2^4(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\},$$

而 $a=10'',\cdots\cdots15^\circ$,割線自 $10''$ 至 15° 用此式.

(8) 割線求餘弧:

$$\frac{\pi}{2}-a=r^2\div\left\{\sec a-\frac{r^2}{\lfloor\underline{3}\cdot\sec a}-\frac{17\,{}^4r}{3\,\lfloor\underline{5}\cdot\sec^3 a}+\frac{367\,r^6}{3\,\lfloor\underline{7}\cdot\sec^5 a}\right.$$

$$\left.-\cdots\cdots\right\},\qquad(8)$$

如切線求餘弧之例,由(VII)式知,

$$\frac{\dfrac{r^2}{\sin a+\dfrac{1^2\cdot\sin^3 a}{\lfloor\underline{3}\cdot r^2}+\dfrac{1^2\cdot3^2\cdot\sin^5 a}{\lfloor\underline{5}\cdot r^4}+\dfrac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot\sin^7 a}{\lfloor\underline{7}\cdot r^6}+\cdots}}{r}=\frac{r}{a},$$

可成爲四率比例.

令　$r=\phi_2,\ \sin a=\phi_3,$

則
$$\frac{r^2}{\sec a}=\phi_1=\csc a,$$

上式可書爲:

$$\frac{\phi_1-\frac{\phi_3}{\lfloor 3}-\frac{17\phi_5}{3\cdot\lfloor 5}-\frac{367\phi_7}{3\cdot\lfloor 7}-\cdots\cdots}{r}=\frac{r}{a}$$

或
$$\frac{\pi}{2}-a=r^2\div\left\{\sec a-\frac{r^2}{\lfloor 3\cdot\sec a}-\frac{17\,r^4}{3\,\lfloor 5\cdot\sec^3 a}-\frac{367\,r^6}{3\,\lfloor 7\ \sec^5 a}-\cdots\cdots\right\},$$

而 $a=60°,\cdots\cdots89°50'50''$,割線自 60° 至 89°59'50'' 用此式.

(9) 割線求半弧:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=r\left\{\frac{r(\sec a-r)}{(\sec a+r)}-\frac{8\,r^2(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot(\sec a+r)^2}+\frac{184r^4(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6(\sec a+r)^3}-\frac{8448\,r^6(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot(\sec a+r)^4}+\cdots\cdots\right\}, \quad (9).$$

由(5)式切線求本弧,得

$$a^2=\left(\tan a-\frac{\tan^3 a}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5 a}{5\ r^4}-\frac{\tan^7 a}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots\right)^2,$$

$$=\tan^2 a-\frac{8\tan^4 a}{3\cdot4\cdot r^2}+\frac{184\tan^6 a}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4}-\frac{8448\tan^8 a}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

或
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)-\frac{8\tan^4\left(\frac{a}{2}\right)}{3\cdot4\cdot r^2}+\frac{184\tan^6\left(\frac{a}{2}\right)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4}$$

$$-\frac{8448\tan^8\left(\frac{a}{2}\right)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

因
$$\frac{\sec a+r}{\sec a-r}=\frac{r}{\frac{\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{r}},$$

故上式可化爲:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=r\left\{\frac{r(\sec a-r)}{(\sec a+r)}-\frac{8r^2(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot(\sec a+r)^2}\right.$$
$$+\frac{184r^4(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6(\sec a+r)^3}-\frac{8448r^6(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8(\sec a+r)^4}$$
$$\left.+\cdots\cdots\right\},$$

而 $a=15°,\cdots\cdots30°$,割線自 15°至 30° 用此式.

此外割線自 30° 至 45°,

則由
$$\frac{2r^2-\sec^2 a}{\sec^2 a}=\frac{r}{\sec 2a},$$

求得 $\sec 2a$,

命爲連比例第一率,半徑爲二率,如 (8), 割線求餘弧術,入之,依前得倍本弧 $2a$ 之餘弧

$$\frac{\pi}{2}-2a=a',$$

以減象限弧$\frac{\pi}{2}$,得倍本弧 $2a$,半之,卽本弧

又割線自45°自60°,

則由 $$\frac{2r^2-\sec^2(90^\circ-a)}{\sec^2(90^\circ-a)}=\frac{r}{\sec^2(90^\circ-a)},$$

求得 $\sec 2(90^\circ-a)$,

命爲連比例第一率,半徑爲二率,如(8)割線求餘弧術入之,得

$$2\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\text{之餘弧}$$

$$\frac{\pi}{2}-2\left(\frac{\pi}{2}-2\right)=2a-\frac{\pi}{2},$$

以加象限弧 $\frac{\pi}{2}$,得倍本弧 $2a$,半之即本弧.割線求弧背,所以分爲

$$10''——15^\circ, 15^\circ——30^\circ, 30^\circ——45^\circ,$$

$$45^\circ——60^\circ, 60^\circ——89^\circ59'50''$$

五限者爲便於降位也.以上見戴煦外切密率卷四.

(10) 本弧弧分,徑求四十五度以內正割對數.

$$\log_{10}\sec a=u\left\{\frac{a^2}{\lfloor 2}+\frac{2a^4}{\lfloor 4}+\frac{16a^6}{\lfloor 6}+\frac{272a^8}{\lfloor 8}+\frac{7836a^{10}}{\lfloor 10}+\cdots\right),\qquad (10).$$

戴煦著假數測圓(1852)論八線對數,其前則於續對數簡法(1846)曾論"用數",謂求 $\log_{10}N$,應先求其用

數 $1+y$ 之對數,而 y 爲小數.

而 $$\log_{10}(1+y)=u\ \log_e(1+y)$$

$$=u\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\right\},$$

說詳李儼對數之發明及其東來.[26] 由上義可求"以本弧弧分徑求四十五度以内正割對數", 因 45° 以内各正割爲半徑 $(r=1)$ 外帶割線半徑差

$$(y=\sec\alpha-r=\sec\alpha-1)$$

故 $$\log_{10}\sec\alpha=\log_{10}\{1+\overline{\sec\alpha-1}\}=\log_{10}(1+y)$$

$$=u\ \log_e(1+y)=u\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right\},$$

而 $$y=(\sec\alpha-1),$$

又 $$\phi'_3=\sec\alpha-r=\sec\alpha-1=\frac{\phi_3}{\underline{|2}}+\frac{5\phi_5}{\underline{|4}}+\frac{61\phi_7}{\underline{|6}}+\frac{1385\phi_9}{\underline{|8}}$$

$$+\frac{50521\phi_{11}}{\underline{|10}}+\cdots\cdots,$$

則 $$\phi'_5=\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}=(\sec\alpha-1)^2=\frac{6\phi_5}{\underline{|4}}+\frac{150\phi_7}{\underline{|6}}$$

$$+\frac{5166\phi_9}{\underline{|8}}+\frac{252750\phi_{11}}{\underline{|10}}+\cdots\cdots,$$

(26) 見中算史論叢(一)民國二十年(1931),上海.

$$\phi'_7=\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}=(\sec a-1)^3=\frac{90\phi_7}{\lfloor\underline{6}}+\frac{6300\phi_9}{\lfloor\underline{8}}$$

$$+\frac{466830\phi_{11}}{\lfloor\underline{10}}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_9=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}=(\sec a-1)^4=\frac{2520\phi_9}{\lfloor\underline{8}}+\frac{378000\phi_{11}}{\lfloor\underline{10}}$$

$$+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_{11}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4}=(\sec a-r)^5=\frac{113400\phi_{11}}{\lfloor\underline{10}}+\cdots\cdots,$$

故
$$\phi'_3-\frac{1}{2}\phi'_5+\frac{1}{3}\phi'_7-\frac{1}{4}\phi'_9+\frac{1}{5}\phi'_{11}-\cdots\cdots$$

$$=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}-\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\phi_3}{\lfloor\underline{2}}+\frac{2\phi_5}{\lfloor\underline{4}}+\frac{16\phi_7}{\lfloor\underline{6}}+\frac{272\phi_9}{\lfloor\underline{8}}+\frac{7936\phi_{11}}{\lfloor\underline{10}}+\cdots\cdots$$

上式之分母,爲"本弧求割線"之分母,其分子爲"本弧求切線"之分子.故,

$$\log_{10}\sec a=u\left\{\frac{a^2}{\lfloor\underline{2}}+\frac{2a^4}{\lfloor\underline{4}}+\frac{16a^6}{\lfloor\underline{6}}+\frac{272a^8}{\lfloor\underline{8}}+\frac{7936a^{10}}{\lfloor\underline{10}}+\cdots\right\}$$

爲四十五度以內諸正割對數之公式.

19. 丁取忠李善蘭顧觀光

同時丁取忠,李善蘭,顧觀光雖亦論究割圓學說,

以視明,董,項,戴倘多遜色.

丁取忠著數學拾遺,咸豐元年(1851)鄒漢勳序稱:"於友人家得一算書,蓋杜德美原術,第其文隱奥難解,而又無算例,(丁取忠)果臣乃發憤爲算例凡若干言,書成,名曰數學拾遺.時丁取忠初不知有明氏,董氏書也.[27]

李善蘭則古昔齋算學十二爲級數回求,示有"弧背求正弦",間"正弦求弧背"之一例,所謂回求即還原術也.其方圓闡幽所舉之弧背求正弦,弧背求正矢,正弦求弧背,正矢求弧背,卽杜術之(II),(III),(VII),(VIII);弧背求正切,弧背求正割,正切求弧背,正割求弧背三術,正割求弧背一術,卽戴氏之(1),(3),(5),(7),(9).其稍異者爲次之二術:

(1)正弦求弧背,用圜外積術:

$$a=\frac{1}{r}\left\{(r+\operatorname{vers} a)\sin a-\left(\frac{2\sin^3 a}{3!\cdot r}+\frac{2\cdot 3\sin^5 a}{5!\cdot r^3}+\frac{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot \sin^7 a}{7!\cdot r^5}+\frac{2\cdot 3^2\cdot 3^2\ 5^2\cdot \sin^9 a}{9!\cdot r^7}+\cdots\cdots\right)\right\}$$

(2)正割求弧背又術:

---

(27)　見白芙堂叢書本數學拾遺.

$$a^2=r\left\{t-\frac{2t^2}{\lfloor 4\cdot r}+\frac{23\,t^3}{\lfloor 6\cdot r^2}-\frac{264\,t^4}{\lfloor 8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\},$$

而 $$t=\frac{2r\cdot 2(\sec a-r)}{2r+(\sec a-r)}=\frac{2^2\cdot\tan^2\frac{a}{2}}{r}$$ 爲用數.

顧觀光(字尙之,金山人,1799–1862)以項名達未有切割求餘線術特爲補之.(28)又以戴煦僅有以本弧弧分徑求四十五度以內正割對數,爲著"用諸乘差求八線對數法"(1855).用求他三角函數之對數值.(29)

20. 徐有壬之測圜密率及割圜八線綴術

徐有壬 (1800–1860) 著測圜密率三卷,未記年月,咸豐壬子(1852)戴煦自序外切密率稱:"泰西杜氏德美以連比例九術入中國,…… 但能求弦矢,而不能求切割二線,鈞卿徐氏(有壬)有切線弧背互求二術",觀此則測圜密率之成,蓋在壬子(1852)前矣.徐有壬又著割圜八線綴術大約未完稿,卷數亦未定.先是南豐吳嘉善(字子登),長沙丁取忠(字果臣)曾聞其說,及徐氏卒後,吳嘉善爲衍成三卷,見同治元年(1862)吳嘉

(28) 見顧觀光算賸續編內"書割圜捷術後".(1851)

(29) 見顧觀光算賸餘稿.

善序.湘陰左潛(字壬叟)又爲補草,合成四卷,語見同治癸酉(1873)左潛序.是年冬十一月左潛又撰綴術釋戴一卷,綴術釋明二卷,以徐氏所擬綴術,治戴煦外切密率及明安圖割圜密率捷法.

徐有壬於測圓密率卷一第五術,"圜徑冪求圜周冪"稱:

$$p^2=9d^2\left(1+\frac{1^2}{3\cdot4}+\frac{1^2\cdot2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\cdots\right\},$$

測圓密率卷二,首述杜氏(II),(III),(VII),(XIII)四術外,有"弦矢求弧背","正切求弧背","弧背求正切"三術,卽:

$$a=\sin a+\frac{2\,\text{vers}^2\,a}{3\cdot\sin a}\left\{1-\frac{\text{vers}^2\,a}{5\cdot\sin^2 a}+\frac{3\cdot\text{vers}^2\,a}{5\cdot7\cdot\sin^2 a}\right.$$

$$\left.-\frac{3\cdot5\cdot\text{vers}^2\,a}{5\cdot7\cdot8\sin^2 a}+\cdots\cdots\right\},$$

$$a=\sin a-\frac{\tan^3 a}{3\cdot r^2}+\frac{3\cdot\tan^5 a}{3\cdot5\cdot r^4}-\frac{3\cdot5\cdot\tan^7 a}{3\cdot5\cdot7\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

$$\tan a=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6,$$

$$=a+\frac{a^3}{3}+\frac{2a^5}{3\cdot5}+\frac{17a^7}{3\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{62a^9}{3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}$$

$$+\frac{1382\,a^{11}}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}+\cdots\cdots,\qquad (r=1).$$

$$=a+\frac{2a^3}{\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{16a^5}{\lfloor 5\; r^4}+\frac{272a^7}{\lfloor 7\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

而 $T_1=a,$

$$T_2=\frac{T_1\cdot a^2}{3\cdot r^2},$$

$$T_3=\frac{T_2\cdot 2a^2}{5\cdot r^2},\qquad D_1=T_2{}^2\cdot T_1,$$

$$T_4=\frac{T_3\cdot 2a^2+D_1}{7\cdot r^2},\qquad D_2=T_2\cdot T_3\cdot 2T_1,$$

$$T_5=\frac{T_4\cdot 2a^2+D_2}{9\cdot r^2},\qquad D_3=\left(T_2T_4+\frac{1}{2}T_3{}^2\right)\cdot 2T_1,$$

$$T_6=\frac{T_5\cdot 2a^2+D_3}{11\cdot r^2},\qquad D_4=(T_2T_5+T_3T_4)\cdot 2T_1.$$

以上三術并可用杜氏九術解之.

其卷三共立大小互求十八術,即:

(1)大矢求小矢:

$$\text{vers}\frac{a}{m}=\frac{(\text{vers}\,a)}{m^2}+\frac{(m^2-1)\cdot 2\cdot(\text{vers}\,a)^2}{3\cdot 4\cdot m^4\cdot r}$$

$$+\frac{(m^2-1)(4m^2-1)\cdot 2\cdot(\text{vers}\,a)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot m^6\cdot r^2}+\cdots\cdots,$$

(2)小矢求大矢:

$$\text{vers}\,m\,a=m^2(\text{vers}\,a)-\frac{m^2(m^2-1)\cdot 2\cdot(\text{vers}\,a)^2}{3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(m^2-1)(m^2-4)\cdot 2^2\cdot(\text{vers}\,a)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}+\cdots,$$

(3)大弦求小弦:

$$\sin\frac{a}{m}=\frac{\sin a}{m}+\frac{m(m^2-1)\sin^3 a}{\underline{|3}\cdot m^3\cdot r^2}$$

$$+\frac{m(m^2-1)(9m^2-1)\sin^5 a}{\underline{|5}\cdot m^5\cdot r^4}+\cdots\cdots,$$

(4)小弦求大弦:

$$\sin ma=m\sin a-\frac{m(m^2-1)\sin^3 a}{\underline{|3}\cdot r^2}$$

$$+\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)\sin^5 a}{\underline{|5}\cdot r^4}$$

$$-\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)\sin^7 a}{\underline{|7}\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

以上四術,本董祐誠法.

(5)大弦求小矢:

$$\text{vers}\frac{a}{m}=T_1\left(=\frac{\sin^2 a}{2\cdot m^2\cdot r}\right)+\frac{2(4m^2-1)T_1{}^2}{3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{2(16m^2-1)T_1\cdot T_2}{5\cdot 6\cdot r}+\frac{2(36m^2-1)T_1\cdot T_3}{7\cdot 8\cdot r}+\cdots,$$

(6)小弦求大矢:

$$\text{vers}\, ma=T_1\left(=\frac{m^2\sin^2 a}{2r}\right)-\frac{(m^2-4)\cdot T_1\cdot\sin a}{\cdot\quad 3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{(m^2-16)\cdot T_2\cdot\sin^2 a}{5\cdot6\cdot r^2}-\frac{(m^2-36)\cdot T_3\cdot\sin^3 a}{7\cdot8\cdot r}$$

$$+\cdots\cdots,$$

(7)大矢求小弦冪:

$$\sin\frac{a}{m}=\left\{r\left(\frac{2\text{ vers }a}{m^2}+\frac{(m^2-4)(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot4\cdot m^4\cdot r}\right.\right.$$

$$+\frac{(m^2-4)(4m^2-4)(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}$$

$$+\frac{(m^2-4)(4m^2-4)(9m^2-4)(2\text{ vers }a)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot m^8\cdot r^3}$$

$$\left.\left.+\cdots\cdots\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

(8)小矢求大弦冪:

$$\sin m\,a=\left\{r\left[m^2(2\text{ vers }a)-\frac{m^2(4m^2-1)(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot4\cdot r}\right.\right.$$

$$+\frac{m^2(4m^2-1)(4m^2-4)(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$

$$-\frac{m^2(4m^2-1)(4m^2-4)(4m^2-9)(2\text{ vers }a)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\ r^3}$$

$$\left.\left.+\cdots\cdots\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

(9)大切求小弦:

$$\sin\frac{a}{m}=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\tan a}{m}-\frac{(2m^2+1)\tan^3 a}{\lfloor 3\cdot m^3\cdot r^2}$$

$$+\frac{(24m^4+20m^2+1)\tan^5 a}{\lfloor 5\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{(720m^6+784m^4+70m^2+1)\tan^7 a}{\lfloor 7\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(40320m^8+52352m^6+6384m^4+168m^2+1)\tan^9 a}{\lfloor 9\cdot m^9\cdot r^8}$$

$$-\cdots\cdots,$$

而　$T_1=\dfrac{\tan a}{m}$,　　$t=\dfrac{\tan^4 a}{r^2}$

$$T_2=\frac{(2m^2+1)T_1T_1^2}{2\cdot 3\cdot r^2},\qquad D_1=1\cdot 2\cdot\frac{t\cdot T_1}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(18m^2+1)\,T_2\cdot T_1^2}{4\cdot 5\cdot r^2}-\frac{D_1}{4\cdot 5},\qquad D_2=3\cdot 4\cdot\frac{t\cdot T_2}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(50m^2+1)T_3\cdot T_1^2}{6\cdot 7\cdot r^2}-\frac{D_2}{6\cdot 7},\qquad D_3=5\cdot 6\cdot\frac{t\cdot T_3}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(98m^2+1)T_4\cdot T_1^2}{8\cdot 9\cdot r^2}-\frac{D_3}{8\cdot 9},\qquad D_4=7\cdot 8\cdot\frac{t\cdot T_4}{r^2},$$

$$T_6=\frac{(162m^2+1)T_5\cdot T_1^2}{10\cdot 11\cdot r^2}-\frac{D_4}{10\cdot 11}.$$

(10)小切求大弦.

$$\sin m\alpha = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + T_5 - T_6 + \cdots\cdots,$$

$$= m\tan\alpha - \frac{(m^2+2)m\cdot\tan^3\alpha}{\lfloor\!\underline{3}\cdot r^2}$$

$$+\frac{(m^4+20m^2+24)m\tan^5\alpha}{\lfloor\!\underline{5}\cdot r^4}$$

$$-\frac{(m^6+70m^4+784m^2+720)m\cdot\tan^7\alpha}{\lfloor\!\underline{7}\cdot r^4}$$

$$+\frac{(m^8+168m^6+638m^4+5235m^2+40320)\cdot m\tan^9\alpha}{\lfloor\!\underline{9}\cdot r^8}$$

$$-\cdots\cdots,$$

而 $T_1 = m\tan\alpha,$

$$T_2 = \frac{(m^2+2)\cdot T_1\cdot\tan^2\alpha}{2\cdot 3\cdot r}, \qquad D_1 = \frac{T_1\tan^2\alpha}{r^2}$$

$$T_3 = \frac{(m^2+18)\cdot T_2\cdot\tan^2\alpha}{4\cdot 5\cdot r^2} - \frac{D_1\tan^2\alpha}{4\cdot 5\cdot r^2} \qquad D_2 = \frac{T_2\tan^2\alpha}{r^2},$$

$$T_4 = \frac{(m^2+50)\cdot T_3\cdot\tan^2\alpha}{6\cdot 7\cdot r^2} - \frac{D_2\tan^2\alpha}{6\cdot 7\cdot r^2} \qquad D_3 = \frac{T_3\tan^2\alpha}{r^2},$$

$$T_5 = \frac{(m^2+98)\cdot T_4\cdot\tan^2\alpha}{8\cdot 9\cdot r^2} - \frac{D_3\tan^2\alpha}{8\cdot 9\cdot r^2} \qquad D_4 = \frac{T_4\tan^2\alpha}{r^2},$$

$$T_6 = \frac{(m^2+162)\cdot T_5\cdot\tan^2\alpha}{10\cdot 11\cdot r^2} - \frac{D_4\cdot\tan^2\alpha}{10\cdot 11\cdot r^2}.$$

(11)大切求小矢:

$$\operatorname{vers}\frac{a}{m}=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\tan^2 a}{|\underline{2}\cdot m^2\cdot r}-\frac{(8m^2+1)\tan^4 a}{|\underline{4}\cdot m^4\cdot r^3}+\frac{(184m^4+40m^2+1)\tan^6 a}{|\underline{6}\cdot m^6\cdot r^5}$$

$$-\frac{(6448m^6+2464m^4+112m^2+1)\tan^8 a}{|\underline{8}\cdot m^8\cdot r^7}$$

$$+\frac{(648574m^8+229760m^6+14448m^4+240m^2+1)\tan^{10} a}{|\underline{10}\cdot m^{10}\cdot r^9}$$

$$-\cdots\cdots,$$

而 $T_1=\dfrac{\tan^2 a}{2\cdot m^2\cdot r}$, $t=\dfrac{\tan^4 a}{r^2}$,

$T_2=\dfrac{(8m^2+1)T_1\cdot 2T_1}{3\cdot 4\cdot r}$, $D_1=2\cdot 3\cdot\dfrac{t\cdot T_1}{r^2}$,

$T_3=\dfrac{(32m^2+1)T_2\cdot 2T_1}{5\cdot 6\cdot r}-\dfrac{D_1}{5\cdot 6}$, $D_2=4\cdot 5\cdot\dfrac{t\cdot T_2}{r^2}$,

$T_4=\dfrac{(72m^2+1)T_3\cdot 2T_1}{7\cdot 8\cdot r}-\dfrac{D_2}{7\cdot 8}$, $D_3=6\cdot 7\cdot\dfrac{t\cdot T_3}{r^2}$,

$T_5=\dfrac{(128m^2+1)\cdot T_4\cdot 2T_1}{9\cdot 10\cdot r}-\dfrac{D_3}{9\cdot 10}$ $D_4=8\cdot 9\cdot\dfrac{t\cdot T_4}{r^2}$,

$T_6=\dfrac{(200m^2+1)\cdot T_5\cdot 2T_1}{11\cdot 12\cdot r}-\dfrac{D_4}{11\cdot 12}$.

(12)小切求大矢:

$$\operatorname{vers} m\alpha = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + T_5 - T_6 + \cdots\cdots,$$

$$= \frac{m^2 \tan^2 \alpha}{\lfloor 2 \cdot r} - \frac{m^2(m^2+8)\tan^4 \alpha}{\lfloor 4 \cdot r^3} + \frac{m^2(m^4+40m^2+184)\tan^6 \alpha}{\lfloor 6 \cdot r^5}$$

$$- \frac{m^2(m^6+112m^4+2464m^2+6448)\tan^8 \alpha}{\lfloor 8 \cdot r^7}$$

$$+ \frac{m^2(m^8+240m^6+14448m^4+229760m^2+648574)\tan^{10} \alpha}{\lfloor 10 \cdot r^9} - \cdots\cdots,$$

而

$$T_1 = \frac{m^2 \cdot \tan^2 \alpha}{2 \cdot r},$$

$$T_2 = \frac{(m^2+8) T_1 \tan^2 \alpha}{3 \cdot 4 \cdot r^2}, \qquad D_1 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{T_1 \cdot \tan^2 \alpha}{r^2},$$

$$T_3 = \frac{(m^2+32) \cdot T_2 \cdot \tan^2 \alpha}{5 \cdot 6 \cdot r^2} - \frac{D_1 \tan^2 \alpha}{5 \cdot 6 \cdot r^2}, \qquad D_2 = 4 \cdot 5 \cdot \frac{T_2 \cdot \tan^2 \alpha}{r^2},$$

$$T_4 = \frac{(m^2+72) \cdot T_3 \cdot \tan^2 \alpha}{7 \cdot 8 \cdot r^2} - \frac{D_2 \tan^2 \alpha}{7 \cdot 8 \cdot r^2}, \qquad D_3 = 6 \cdot 7 \cdot \frac{T_3 \cdot \tan^2 \alpha}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(m^2+128)\cdot T_4\cdot\tan^2 a}{9\cdot 10\cdot r^2}-\frac{D_3\tan^2 a}{9\cdot 10\cdot r^2},\qquad D_4=8\cdot 9\cdot\frac{T_4\cdot\tan^2 a}{r^2},$$

$$T_6=\frac{(m^2+200)\cdot T_5\cdot\tan^2 a}{11\cdot 12\cdot r^2}-\frac{D_4\tan^2 a}{11\cdot 12\cdot r^2}.$$

(13)大弦求小切:

$$\tan\frac{a}{m}=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\sin a}{m}+\frac{(m^2+2)\sin^3 a}{\lfloor 3\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{(9m^4+20m^2+16)\sin^5 a}{\lfloor 5\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$+\frac{(225m^6+518m^4+560m^2+272)\sin^7 a}{\lfloor 7\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(11025m^8+25832m^6+31584m^4+22848m^2+7936)\sin^9 a}{\lfloor 9\cdot m^9\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

而 $T_1=\frac{\sin a}{m}$,

$$T_2=\frac{(m^2+2)T_1\cdot T_1^2}{2\cdot 3\cdot r^2},\qquad D_1=2\cdot\frac{T_1^3}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(9m^2+2)T_2\cdot T_1^2}{4\cdot 5\cdot r^2}+\frac{D_1\cdot T_1^2}{4\cdot 5\cdot r^2},\qquad D_2=2\cdot\frac{3\cdot T_1^2\cdot T_2}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(25m^2+2)T_3\cdot T_1^2}{6\cdot 7\cdot r^2}+\frac{D_2\cdot T_1^2}{6\cdot 7\cdot r^2},\qquad D_3=2\cdot\frac{3(T_1^2\cdot T_3+T_2^2\cdot T_1)}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(49m^2+2)T_4\cdot T_1^2}{8\cdot 9\cdot r^2}+\frac{D_3\cdot T_1^2}{8\cdot 9\cdot r^2},\qquad D_4=2\cdot\frac{3T_1^2\cdot T_4+6T_1\cdot T_2T_3+T_2^3}{r^2};$$

$$T_6=\frac{(81m^2+2)T_5\cdot T_1^2}{10\cdot 11\cdot r^2}+\frac{D_4\cdot T_1^2}{10\cdot 11\cdot r^2}.$$

(14)小弦求大切:

$$\tan m\alpha=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6$$

$$=m\sin\alpha+\frac{(2m^2+1)\sin^3\alpha}{\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{(16m^4+20m^2+9)\sin^5\alpha}{\lfloor 5\cdot r^4},$$

$$+\frac{(272m^6+560m^4+518m^2+225)\sin^7\alpha}{\lfloor 7\cdot r^6},$$

$$+\frac{(7936m^8+22848m^6+31584m^4+25832m^2+11025)\sin^9\alpha}{\lfloor 9\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

而 $T_1=m\sin\alpha,$

$$T_2=\frac{(2m^2+1)\cdot T_1\cdot\sin^2 a}{2\cdot 3\cdot r^2}$$

$$D_1=2m^2\frac{T_1{}^3}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(2m^2+9)\cdot T_2\cdot\sin^2 a}{4\cdot 5\cdot r^2}+\frac{D_1\cdot\sin^2 a}{4\cdot 5\cdot r^2},$$

$$D_2=2m^2\frac{3T_1{}^2\cdot T_2}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(2m^2+25)\cdot T_3\cdot\sin^2 a}{6\cdot 7\cdot r^2}+\frac{D_2\cdot\sin^2 a}{6\cdot 7\cdot r^2},$$

$$D_3=2m^2\frac{3(T_1{}^2\cdot T_3+T_2{}^2\cdot T_1)}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(2m^2+49)T_4\sin^2 a}{8\cdot 9\cdot r^2}+\frac{D_3\cdot\sin^2 a}{8\cdot 9\cdot r^2},$$

$$D_4=2m^2\frac{3T_1{}^2\cdot T_4+6T_1\cdot T_2T_3+T_2{}^3\cdot}{r^2};$$

$$T_6=\frac{(2m^2+81)T_5\cdot\sin^2 a}{10\cdot 11\cdot r^2}+\frac{D_4\cdot\sin^2 a}{10\cdot 11\cdot r^2}.$$

(15)大矢求小切冪:

$$\tan\frac{a}{m}=\left\{r\,(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$=\left\{\frac{r(2\text{ vers }a)}{m^2}+\frac{(m^2+8)r^2(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot 4\cdot m^4\cdot r}+\frac{(4m^4+40m^2+136)r^3(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot m^6\cdot r^2}\right.,$$

$$+\frac{(36m^6+392m^4+1904m^2+3968)r^4(2\text{ vers }a)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot m^8\cdot r^3}$$

$$+\frac{(576m^8+6560m^6+37128m^4+119040m^2+176896)r^5(2\,\text{vers}\,a)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot m^{10}\cdot r^4}+\cdots\cdots\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

而

$$T_1=\frac{(2\,\text{vers}\,a)}{m^2},$$

$$T_2=\frac{(m^2+8)T_1\cdot T_1}{3\cdot4\cdot r}, \qquad D_1=6m^2\frac{T_1^2}{r},$$

$$T_3=\frac{(4m^2+8)T_2\cdot T_1}{5\cdot6\cdot r}+\frac{D_1\cdot T_1}{5\cdot6\cdot r}, \qquad D_2=6m^2\frac{2T_1\cdot T_2}{r},$$

$$T_4=\frac{(9m^2+8)T_3\cdot T_1}{7\cdot8\cdot r}+\frac{D_2\cdot T_1}{7\cdot8\cdot r}, \qquad D_3=6m^2\frac{2T_1T_3+T_2T_2}{r},$$

$$T_5=\frac{(16m^2+8)T_4\cdot T_1}{9\cdot10\cdot r}+\frac{D_3\cdot T_1}{9\cdot10\cdot r}, \qquad D_4=6m^2\frac{2(T_1T_4+T_2T_3)}{r};$$

$$T_6=\frac{(25m^2+8)T_5\cdot T_1}{11\cdot12\cdot r}+\frac{D_4\cdot T_1}{11\cdot12\cdot r}.$$

(16)小矢求大切冪.

$$\tan m\,a=\Big\{r\,(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots)\Big\}^{\frac{1}{2}};$$

$$=\left\{r\left[m^2(2\text{ vers }a)+\frac{(8m^2+1)\cdot m^2\cdot(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{(136m^4+40m^2+4)m^2(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}\right.\right.$$

$$+\frac{(3968m^6+1904m^4+392m^2+36)m^2(2\text{ vers }a)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$

$$\left.\left.+\frac{(176896m^8+119040m^6+37128m^4+6560m^2+576)m^2(2\text{ vers }a)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot r^4}+\cdots\cdots\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

而 $T_1=m^2(2\text{ vers }a)$,

$$T_2=\frac{(8m^2+1)T_1(2\text{ vers }a)}{3\cdot4\cdot r},\qquad D_1=6m^2\frac{T_1^2}{r},$$

$$T_3=\frac{(8m^2+4)T_2(2\text{ vers }a)}{5\cdot6\cdot r}+\frac{D_1(2\text{ vers }a)}{5\cdot6\cdot r},\qquad D_2=6m^2\frac{2T_1T_2}{r},$$

$$T_4=\frac{(8m^2+9)T_3(2\text{ vers }a)}{7\cdot8\cdot r}+\frac{D_2(2\text{ vers }a)}{7\cdot8\cdot r},\qquad D_3=6m^2\frac{2T_1T_3+T_2^2}{r},$$

$$T_5=\frac{(8m^2+16)T_4(2\text{ vers }a)}{9\cdot10\cdot r}+\frac{D_3(2\text{ vers }a)}{9\cdot10\cdot r},\qquad D_4=6m^2\frac{2(T_1T_4+T_2T_3)}{r},$$

$$T_6=\frac{(8m^2+25)T_5(2\text{ vers }a)}{11\cdot12\cdot r}+\frac{D_4(2\text{ vers }a)}{11\cdot12\cdot r}.$$

(17)大切求小切:

$$\tan\frac{a}{m}=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\tan a}{m}-\frac{(2m^2-2)\tan^3 a}{\lfloor 3\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{(24m^4-40m^2+16)\tan^5 a}{\lfloor 5\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{(720m^6-1568m^4+1120m^2+272)\tan^7 a}{\lfloor 7\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(40320m^8-104704m^6+102144m^4-45696m^2+7936)\tan^9 a}{\lfloor 9\cdot m^9\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

而 $T_1=\frac{\tan a}{m}$,

$$T_2=\frac{(m^2-1)T_1\cdot T_1^2}{3\ r^2},$$

$$T_3=\frac{(3m^2-2)T_2\cdot T_1^2}{5\ r^2}, \qquad D_1=T_2^2\cdot T_1,$$

$$T_4=\frac{(5m^2-2)\cdot T_3\cdot T_1^2}{7\ r^2}-\frac{D_1}{7r^2}, \qquad D_2=2T_2T_3T_1,$$

$$T_5=\frac{(7m^2-2)T_4\cdot T_1^2}{9r^2}-\frac{D_2}{9r^2},\qquad D_3=(2T_2T_4+T_3^2)T_1,$$

$$T_6=\frac{(9m^2-2)\cdot T_5\cdot T_1^2}{11r^2}-\frac{D_3}{11r^2},\qquad D_4=2(T_2T_5+T_3T_4)T_1,$$

(18)小切求大切:

$$\tan m\,a=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots,$$

$$=m\tan a-\frac{(2m^2-2)m\cdot\tan^3 a}{\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{(16m^4-40m^2+24)m\cdot\tan^5 a}{\underline{|5}\cdot r^4}$$

$$-\frac{(272m^6-1120m^4+1568m^2-720)m\cdot\tan^7 a}{\underline{|7}\cdot r^6}$$

$$+\frac{(7936m^8-45696m^6+102144m^4-104704m^2+40320)m\tan^9 a}{\underline{|9}\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

而 $T_1=m\tan a$

$$T_2=\frac{(m^2-1)\cdot T_1\cdot\tan^2 a}{3r^2},$$

$$T_3=\frac{(2m^2-3)\cdot T_2\cdot\tan^2 a}{5r^2},\qquad D_1=T_2^2\cdot T_1,$$

$$T_4=\frac{(2m^2-5)\cdot T_3\cdot\tan^2 a}{7r^2}+\frac{D_1}{7r^2},\qquad D_2=2T_2\cdot T_3\cdot T_1,$$

$$T_5=\frac{(2m^2-7)\cdot T_4\cdot\tan^2 a}{9r^2}+\frac{D_2}{9r^2},\qquad D_3=(2T_2T_4+T_3^2)T_1,$$

$$T_6=\frac{(2m^2-9)\cdot T_5\cdot\tan^2 a}{11r^2}+\frac{D_3}{11r^2}.\qquad D_4=2(T_2T_5+T_3T_4)T_1;$$

以下十八術見割圓密率卷三,其證見割圓八線綴術卷三,并用還原術或借徑術入之.至大小割線互求式,僅得小割求大弦,與小割求大矢四術,餘則未能求得差根(如D_1, D_2,……等),故無可立術也.

割圓八線綴術卷四,臚列弦,切,矢,割,弧背求各線式,如:

(a) 弦求各線式:

$$\text{vers}\, a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{2}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}+\frac{5}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots,$$

$$\tan a=\sin a+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 a}{r^2}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^5 a}{r^4}+\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\sin^7 a}{r^6}$$

$$+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\sin^9 a}{r^8}+\cdots\cdots,\qquad\text{(項名達)}$$

$$=\sin a+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 a}{r^2}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^5 a}{r^4}+\frac{10}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\sin^7 a}{r^6}$$

$$+\frac{35}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\sin^9 a}{r}+\cdots\cdots,\qquad\text{(項名達)}$$

$$\sec a=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}$$

$$+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots,\qquad\text{(項名達)}$$

$$=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{10}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}$$

$$+\frac{35}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots,\qquad\text{(項名達)}$$

$$\cos a=r-\operatorname{vers} a=r-\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}+\frac{5}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots\right\},$$

$$a=\sin a+\frac{1^2\sin^3 a}{\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot3^2}{\underline{|5}}\cdot\frac{\sin^5 a}{r^4}$$

$$+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{\underline{\lfloor 7}}\cdot\frac{\sin^7 a}{r^6}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{\underline{\lfloor 9}}\cdot\frac{\sin^9 a}{r^8}$$

$$-\cdots\cdots; \qquad \text{(VII)}$$

(b) 切求各線式:

$$\sin a=\tan a-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3 a}{r^2}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^5 a}{r^4}$$

$$-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^7 a}{r^6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^9 a}{r^8}-\cdots\cdots,$$

$$\operatorname{vers} a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2 a}{r}-\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^4 a}{r^3}+\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^6 a}{r^5}$$

$$-\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}+\cdots,$$

$$\sec a=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2 a}{r}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^4 a}{r^3}+\frac{3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^6 a}{r^5}$$

$$-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}+\cdots,$$

$$a=\tan a-\frac{1}{3}\cdot\frac{\tan^3 a}{r^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\tan^5 a}{r^4}-\frac{1}{7}\cdot\frac{\tan^7 a}{r^6}$$

$$+\cdots, \qquad \text{(戴煦)}$$

(c) 矢求各線式:

$$\sin a=2\operatorname{vers} a-\frac{1}{4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^2}{r},$$

$$\tan a=(2\,\text{vers}\,a)+\frac{3}{4}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^2}{r}+\frac{3\cdot 4}{4\cdot 6}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^3}{r^2}$$

$$+\frac{3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

$$\sec a=r+\frac{(2\,\text{vers}\,a)}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^2}{r}$$

$$+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^3}{r^2}+\frac{2}{4\cdot 4}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

$$a=\frac{1}{\lfloor 2}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^2}{r}+\frac{1^2}{\lfloor 4}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^3}{r^2}$$

$$+\frac{1^2\cdot 2^2}{\lfloor 6}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^4}{r^3}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{\lfloor 8}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^5}{r^4}$$

$$+\cdots\cdots,$$

(d) 割求各線式:

$$\sin^2 a=(\sec\,a-r)-\frac{3}{4}\cdot\frac{(\sec\,a-r)^2}{r}+\frac{3\cdot 4}{4\cdot 6}\cdot\frac{(\sec\,a-r)^3}{r^2}$$

$$-\frac{3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(\sec\,a-r)^4}{r^3}+\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{(\sec\,a-r)^5}{r^4}$$

$$-\cdots\cdots,$$

$$\tan a=(\sec a-r)+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec\,a-r)^2}{r},$$

$$\text{vers}\,a=\frac{1}{2}\cdot(\sec a-r)-\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}$$

$$+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{1}{4\cdot 4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

$$a=\frac{1}{\underline{|2}}(\sec a-r)-\frac{5}{\underline{|4}}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}$$

$$+\frac{64}{\underline{|6}}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{1560}{\underline{|8}}\,\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

(e) 弧背求各線式:

$$\sin a=a-\frac{a^3}{\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{a^5}{\underline{|5}\cdot r^4}-\frac{a^7}{\underline{|7}\cdot r^6}+\frac{a^9}{\underline{|9}\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

(II)

$$\tan a=a-\frac{2}{\underline{|3}}\cdot\frac{a^3}{r^2}+\frac{16}{\underline{|5}}\cdot\frac{a^5}{r^4}+\frac{272}{\underline{|7}}\cdot\frac{a^7}{r^6}+\cdots,$$ (戴煦)

$$\operatorname{vers} a=\frac{1}{\underline{|2}}\cdot\frac{a^2}{r}-\frac{1}{\underline{|4}}\cdot\frac{a^4}{r^3}+\frac{1}{\underline{|6}}\cdot\frac{a^6}{r^5}-\frac{1}{\underline{|8}}\cdot\frac{a^8}{r^7}+\cdots,$$

(III)

$$\sec a=r+\frac{1}{\underline{|2}}\cdot\frac{a^2}{r}+\frac{5}{\underline{|4}}\cdot\frac{a^4}{r^3}+\frac{61}{\underline{|6}}\cdot\frac{a^6}{r^5}+\frac{1385}{\underline{|8}}\cdot\frac{a^8}{r^7}$$

$$+\cdots\cdots,$$ (戴煦)

割圜八線綴術卷二載

$$\operatorname{vers} a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{2}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}$$

$$+\frac{5}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots,$$

式之幾何證法.

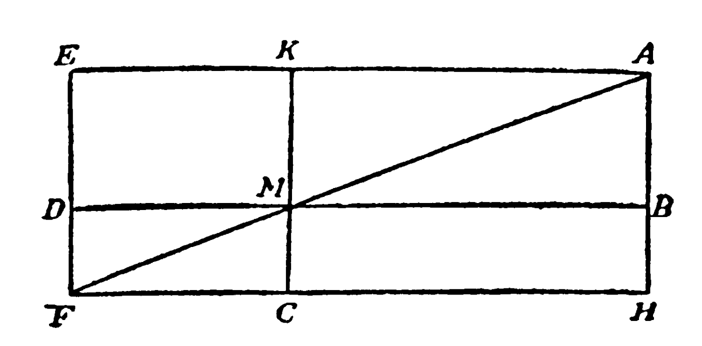
術曰: $\operatorname{vers} a=T_1+T_2+T_3+T_4+\cdots\cdots,$

而 $T_1=\frac{\sin a}{d},\ T_2=\frac{T_1^{\ 2}}{d},\ T_3=\frac{(2T_1+T_2)T_1}{d},$

$$T_4=\frac{\{2(T_1+T_2)+T_3\}T_3}{d}+\cdots\cdots,$$

如第四十五圖先作AF長方形,

令 EK=正矢,$KA=d-$正矢=餘矢,



第四十五圖

而 $KC=EK.$

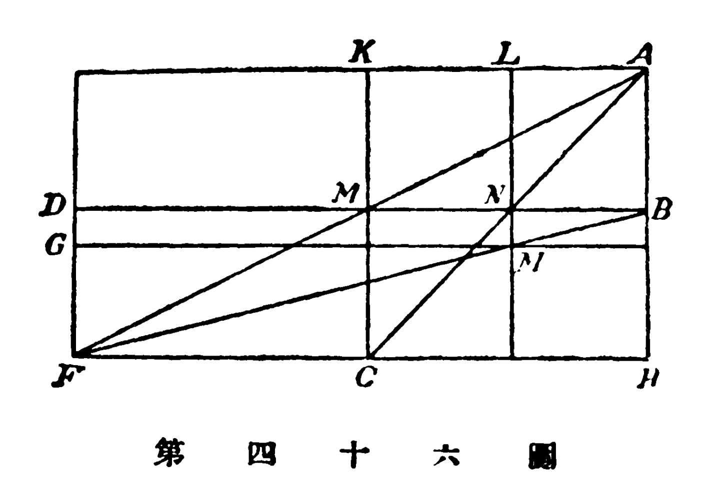
又 $\square AC$=正矢×餘矢$=\sin^2 a.$

但 $\square AC=\square AD,$

$\therefore\ \square AD=\sin^2 a.$

則 $ED=T_1=\frac{\sin^2 a}{d}.$

次取 $KL=KM$,作線交 BD 線於 N,次作 AC 對角線,此線必過 N 點,次作 AF 線此線必過 M' 點.



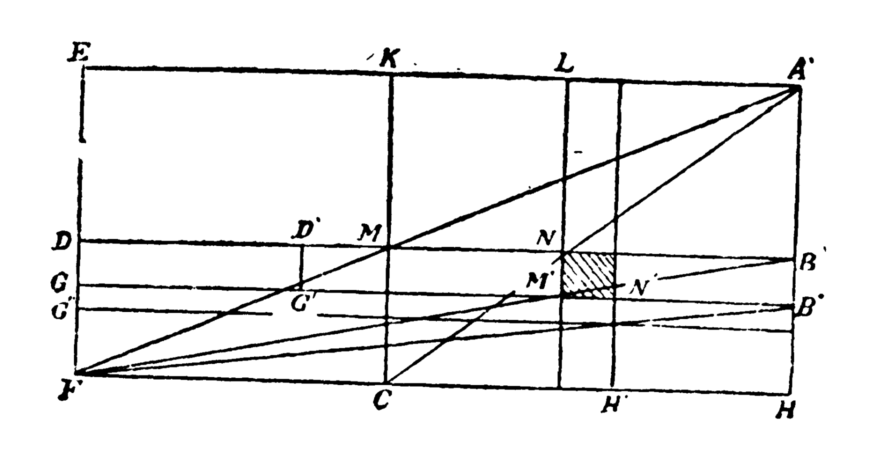
第四十六圖

因 $KL=KM=T_1,\ T_1^2=\square KN=\square NH=BG,$

則 $DG=T_2=\dfrac{T_1^2}{d}.$

次取 $M'N'=M'N$,作 $N'H'$ 線.

次取 $MD'=N'H'$ 作 $D'G'$ 線.



第四十七圖

則 $\square LN'=(T_1+T_2)T_2=\square DG_1$,

[因 $DM=LM'+N'H'$

$MD'=N'H'$

$\therefore\quad DD'=LM'$.]

又 $\square MM'=T_2T_1$,

$\therefore\quad \square DG'+\square MM'=(2T_1+T_2)T_2$,

又 $\square NG=\square M'H$,

則 $(2T_1+T_2)T_3=\square N'H=\square B'G''=\dfrac{(2T_1+T_2)T_2}{d}=GG''$.

前圖爲徐有壬所設以證各線互求各式.今證前術,可先設比例式如:

(1) $d:\sin\alpha=\sin\alpha:T_1$,

(2) $d:T_1=T_1:T_2$,

(3) $d:T_2=2T_1+T_2:T_3$,

(4) $d:T_3=2(2T_1+T_2)+T_3:T_4$,……

命 $\phi_1=r$(爲半徑)$=\dfrac{d}{2}$, $\phi_2=\sin\alpha$, $2\phi_1=d$, 故,

(1) $2\phi_1:\phi_2=\phi_2:T_1$ $\quad T_1=\dfrac{\sin^2\alpha}{2r}=\dfrac{\sin^2\alpha}{d}=\dfrac{\phi_3}{2}$,

(2) $2\phi_1:\dfrac{\phi_3}{2}=\dfrac{\phi_3}{2}:T_2$, $\quad T_2=\dfrac{\sin^4\alpha}{2\cdot4\cdot r^3}=\dfrac{\phi_5}{2\cdot4}$.

(3) $2\phi_1:\dfrac{\phi_5}{2\cdot4}=\left(\dfrac{2\phi_3}{2}+\dfrac{\phi_5}{2\cdot4}\right):T_3$, $T_3=\dfrac{2\phi_7}{2\cdot4^2}+\dfrac{\phi_9}{2\cdot4^3}$,

(4) $$2\phi_1 : \left(\frac{2\phi_7}{2\cdot4^2}+\frac{\phi_9}{2\cdot4^3}\right)=\left\{2\left(\frac{\phi_3}{2}+\frac{\phi_5}{2\cdot4}\right)+\frac{2\phi_7}{2\cdot4^2}+\frac{\phi_9}{2\cdot4^3}\right\}:T_4,$$

$$\therefore\qquad T_4=\frac{4\phi_9}{2\cdot4^3}+\frac{6\phi_{11}}{2\cdot4^4}+\cdots\cdots,$$

同理，$$T_5=\frac{8\phi_{11}}{2\cdot4^4}+\cdots\cdots,$$

幷之,得 $$\text{vers}\,\alpha=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\phi_3}{2}+\frac{\phi_5}{2\cdot4}+\frac{2\phi_7}{2\cdot4^2}+\frac{\phi_9}{2\cdot4^3}+\left(\frac{4\phi_9}{2\cdot4^3}+\frac{6\phi_{11}}{2\cdot4^4}\right)$$

$$+\left(\frac{8\phi_{11}}{2\cdot4^4}\right)+\cdots,$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{2}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}$$

$$+\frac{5}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots.$$ 證訖.

以後各式,徐有壬以還原術,借徑術,商除法之代數法算之.左潛以爲還原術在明氏通弦求弧背,及正矢求弧背法解,已經道及;而借徑術卽明氏借十分全弧通弦率,求百分全弧通弦率,及借百分全弧通弦率,求十分全弧通弦率也.而商除法乃還原術之變法.(30) 實則商除法在項氏象數一原,及戴氏外切密率中已

(30) 見割圜八綫綴術,左潛,同治癸酉(1873)刻.

屢有說述,而借徑術即項氏所稱之易率法也.

(切求正弦式)

(證)既得弦求切式,用還原法入之,得切求弦式.

命 $$\phi'_2=\tan\alpha=\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{r^2}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5\alpha}{r^4}$$

$$+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\sin^7\alpha}{r^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\sin^9\alpha}{r^8}+\cdots\cdots,$$

$$=\phi_2+\frac{\phi_4}{2}+\frac{3\phi_6}{2\cdot 4}+\frac{10\phi_8}{2\cdot 4^2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot 4^3}+\cdots\cdots,$$

故 $$\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}=\phi_3+\frac{2\phi_5}{2}+\frac{8\phi_7}{2\cdot 4}+\frac{32\phi_9}{2\cdot 4^2}+\frac{128\phi_{11}}{2\cdot 4^3},$$

$$\phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}=\phi_4+\frac{3\phi_6}{2}+\frac{15\phi_8}{2\cdot 4}+\frac{70\phi_{10}}{2\cdot 4^2},$$

$$\phi'_6=\phi_6+\frac{5\phi_8}{2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot 4},$$

$$\phi'_8=\phi_8+\frac{7\phi_{10}}{2},$$

$$\phi'_{10}=\phi_{10}.$$

故 $$\phi_2=\phi'_2-\frac{\phi'_4}{2}+\frac{3\phi'_6}{2\cdot 4}-\frac{10\phi'_8}{2\cdot 4^2}+\frac{35\phi'_{10}}{2\cdot 4^3}-\cdots\cdots,$$

即 $$\sin\alpha=\tan\alpha-\frac{\tan^3\alpha}{2r}+\frac{3\tan^5\alpha}{2\cdot 4\cdot r^4}-\frac{10\tan^7\alpha}{2\cdot 4^2\cdot r^6}$$

$$+\frac{35\tan^9\alpha}{2\cdot 4^3\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

$$=\tan a-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3 a}{r}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^5 a}{r^4}$$

$$-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^7 a}{r^6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^9 a}{r^8}-\cdots\text{. 證訖.}$$

(割求正弦率)

(證)既得弦求割式,用還原法入之,得割求弦式.

命 $\phi'_3=2(\sec a-r)=\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{10}{4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}$

$$+\frac{35}{4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\frac{126}{4^4}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^9}+\cdots\cdots,$$

$$=\phi_3+\frac{3\phi_5}{4}+\frac{10\phi_7}{4^2}+\frac{35\phi_9}{4^3}+\frac{126\phi_{11}}{4^4},$$

$$\phi'_5=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{\phi_1}=\frac{2^2(\sec a-r)^2}{r}=\phi_5+\frac{3\phi_7}{4}+\frac{29\phi_9}{4^2}+\frac{130\phi_{11}}{4^3},$$

$$\phi'_7=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{\phi_1}=\frac{2^3(\sec a-r)^3}{r^2}=\phi_7+\frac{9\phi_9}{4}+\frac{57\phi_{11}}{4^2},$$

$$\phi'_9=\frac{2^4(\sec a-r)^4}{r^3}=\phi_9+\frac{12\phi_{11}}{4},$$

$$\phi'_{11}=\phi_{11}.$$

故 $\phi_3=\phi_3'-\frac{3\phi'_5}{4}+\frac{8\phi'_7}{4^2}-\frac{20\phi'_9}{4^3}+\frac{48\phi'_{11}}{4^4},$

即 $\sin^2 a=(\sec a-r)-\frac{3}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}$

$$-\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\cdots\cdots.$$ 證訖.

(切求矢式)

(證)有切求弦式,有弦求矢式,用借徑術入之,得切求矢式.

由切求弦式,

命 $$\phi'_2=\sin a=\tan a-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3 a}{r}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^5 a}{r^4}$$

$$-\frac{10}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\tan^7 a}{r^6}+\frac{35}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\tan^9 a}{r^8}-\cdots\cdots,$$

$$=\phi_2-\frac{\phi_4}{2}+\frac{3\phi_6}{2\cdot4}-\frac{10\phi_8}{2\cdot4^2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot4^3}-\cdots\cdots,$$

$$\phi'_3=\frac{\phi_2'\cdot\phi'_2}{\phi_1}=\frac{\sin^2 a}{r}=\phi_3-\frac{2\phi_5}{2}+\frac{8\phi_7}{2\cdot4}-\frac{32\phi_9}{2\cdot4^2}+\frac{128\phi_{11}}{2\cdot4^3},$$

$$\phi'_5=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{\phi_1}=\frac{\sin^4 a}{r^3}=\phi_5-\frac{4\phi_7}{2}+\frac{24\phi_9}{2\cdot4}-\frac{128\phi_{11}}{2\cdot4^2},$$

$$\phi'_7=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{\phi_1}=\frac{\sin^6 a}{r^5}=\phi_7-\frac{6\phi_9}{2}+\frac{48\phi_{11}}{2\cdot4},$$

$$\phi'_9=\frac{\sin^8 a}{r^7}=\phi_9-\frac{8\phi_{11}}{2},$$

$$\phi'_{11}=\frac{\sin^{10} a}{r^9}=\phi_{11}.$$

又由弦求矢式,知

$$\text{vers}\,a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{2}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}$$

$$+\frac{5}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\phi'_3}{2}+\frac{\phi'_5}{2\cdot4}+\frac{2\phi'_7}{2\cdot4^2}+\frac{5\phi'_9}{2\cdot4^3}+\frac{14\phi'_{11}}{2\cdot4^4},$$

齊其分母相消,得

$$\text{vers}\,a=\frac{\phi_3}{2}-\frac{3\phi_5}{2\cdot4}+\frac{10\phi_7}{2\cdot4^2}-\frac{35\phi_9}{2\cdot4^3}+\frac{126\phi_{11}}{2\cdot4^4},$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2 a}{r}-\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^4 a}{r^3}-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^6 a}{r^5}$$

$$-\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}+\cdots\cdots$$ 證訖.

(矢求切式)

(證)旣得切求矢式,用還原法入之,得矢求切式,

$$\tan a=(2\,\text{vers}\,a)+\frac{3}{4}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^2}{r}+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^3}{r^2}$$

$$+\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^4}{r^3}+\cdots\cdots$$ 證訖.

(切求割式)

(證)有切求弦式,有弦求割式,用借徑術入之,得切求割式.

由切求弦式,

命 $\phi'_2=\sin a=\tan a-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3 a}{r}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^5 a}{r^4}$

$$-\frac{10}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\tan^7 a}{r^6}+\frac{35}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\tan^9 a}{r^8}+\cdots\cdots,$$

$$=\phi_2-\frac{\phi_4}{2}+\frac{3\phi_6}{2\cdot4}-\frac{10\phi_8}{2\cdot4^2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot4^3}-\cdots\cdots,$$

如前求得 $\phi'_3, \phi'_5, \phi'_7, \phi'_9, \phi'_{11},\cdots\cdots$;

又由弦求割式,知

$$(\sec a-r)=\frac{\phi'_3}{2}+\frac{3\phi'_5}{2\cdot4}+\frac{10\phi'_7}{2\cdot4}+\frac{35\phi'_9}{2\cdot4^3}+\frac{126\phi'_{11}}{2\cdot4^4}+\cdots,$$

齊其分母相消,得

$$\sec a=r+\frac{\phi_3}{2}-\frac{\phi_5}{2\cdot4}+\frac{2\phi_7}{2\cdot4^2}-\frac{5\phi_9}{2\cdot4^3}+\frac{14\phi_{11}}{2\cdot4^4},$$

$$=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2 a}{r}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^4 a}{r^3}+\frac{3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^6 a}{r^5}$$

$$-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}+\cdots\cdots.$$ 證訖.

(割求切式)

(證)既得切求割式,用還原法入之,得割求切式,如:

$$\frac{\tan^2 a}{r}=2(\sec a-r)+\frac{2^2}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}.$$ 證訖

(矢求割式)

(證)有矢求切式,有切矢割式,用借徑術入之,得矢求割式.

由矢求切式,

命 $\phi'_3=\tan a=(2\text{ vers }a)+\frac{3}{4}\cdot\frac{(2\text{ vers }a)^2}{r}$

$+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}\cdot\frac{(2\text{ vers }a)^3}{r^2}+\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(2\text{ vers }a)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$

$=\phi_3+\frac{3\phi_5}{4}+\frac{8\phi_7}{4^2}+\frac{20\phi_9}{4^3}+\frac{48\phi_{11}}{4^4},$

$\phi'_5=\phi_5+\frac{6\phi_7}{4}+\frac{25\phi_9}{4^2}+\frac{88\phi_{11}}{4^3},$

$\phi'_7=\phi_7+\frac{9\phi_9}{4}+\frac{51\phi_{11}}{4^2},$

$\phi'_9=\phi_9+\frac{12\phi_{11}}{4},$

$\phi'_{11}=\phi_{11};$

又由切求割式,知

$\sec a-r=\frac{\phi'_3}{2}-\frac{\phi'_5}{2\cdot4}+\frac{2\phi'_7}{2\cdot4^2}-\frac{5\phi'_9}{2\cdot4^3}+\frac{14\phi'_{11}}{2\cdot4^4},$

$=\frac{\phi_3}{2}+\frac{\phi_5}{4}+\frac{\phi_7}{2\cdot4}+\frac{\phi_9}{2\cdot4^2}+\frac{\phi_{11}}{2\cdot4^3}.$

即 $$\sec a = r + \frac{1}{2}(2\,\mathrm{vers}\,a) + \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\,\mathrm{vers}\,a)^2}{r}$$

$$+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(2\,\mathrm{vers}\,a)^3}{r^2}+\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{(2\,\mathrm{vers}\,a)^4}{r^3}+\cdots.$$ 證訖.

(割求矢式)

(證)既得矢求割式,用還原法入之,得割求矢式,如:

$$\mathrm{vers}\,a = \frac{1}{2}(\sec a - r) - \frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a - r)^2}{r}$$

$$+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec a - r)^3}{r}-\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{(\sec a - r)^5}{r^3}+\cdots.$$ 證訖.

(切求弧背式)

(證)有切求弦,有弦求弧背,用借徑術入之,卽得.

(弧背求割式)

(證)有弧背求弦,有弦求割,用借徑術入之,卽得.

(割求弧背式)

(證)有弧背求割式,用還原法入之,卽得.

(矢求弧背式)

(證)有弧背求矢式,用還原法入之,卽得.

以上見割圓八線綴術卷二,其餘各式證法互見明氏項氏,戴氏書中,茲不復載.

割圓八線綴術卷三,又證大小割與各線互求各

式,如:

(小割求大弦冪式)

(證)有割求弦式,有小弦求大弦式,用借徑術入之,即得小割求大弦冪式.

命割求弦式內 $\sin^2 a$ 爲三率,即,

$$\phi'_3=\sin^2 a=(\sec a-r)-\frac{3}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}+\frac{8}{4^2}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{20}{4^3}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{48}{4^4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4}-\cdots\cdots,$$

$$\phi'_5=\frac{\sin^4 a}{r}=\frac{(\sec a-r)^2}{r}-\frac{6}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}+\frac{25}{4^2}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{88}{4^3}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_7=\frac{\sin^6 a}{r^2}=\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{9}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{51}{4^2}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_9=\frac{\sin^8 a}{r^3}=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{12}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_{11}=\frac{\sin^{10} a}{r^4}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4};$$

又將小弦求大弦式兩邊自乘,得:

$$(\sin m\,a)^2=m^2\sin^2 a-\frac{(2m^4-2m^2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^2}+\frac{(16m^6-80m^4+64m^2)}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^4}$$

$$-\frac{(16m^8-224m^6+784m^4-576m^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\ 6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^6}$$

$$+\frac{(256m^{10}-7680m^8+69888m^6-209920m^4+147456m^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^8}-\cdots\cdots,$$

代入通分相消,得

$$(\sin m\,a)^2=m^2(\sec a-r)-\frac{(4m^2+5)}{3\cdot4}\cdot\frac{m^2(\sec a-r)^2}{r^2}+\frac{(16m^4+100m^2+64)}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{m^2(\sec a-r)^3}{r^4}$$

$$\frac{64m^6+1120m^4+3556m^2+1560)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{m^2(\sec a-r)^4}{r^6}$$

$$+\frac{(256m^8+9600m^6+85008m^4+183200m^2+62136)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}\cdot\frac{m^2(\sec a-r)^5}{r^8}$$

爲小割求大弦冪式,倒置其乘數,卽大割求小弦冪式也。

(小割求大矢式)

（證）有割較求矢式，有小矢求大矢式，用借徑術入之，即得小割求大矢式。

命割較求矢式內 2 vers a 為三率，即，

$$\phi'_3=(2\,\text{vers}\,a)=(\sec a-r)-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_5=\frac{(2\,\text{vers}\,a)^2}{r}=\frac{(\sec a-r)^2}{r}-\frac{2}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_7=\frac{(2\,\text{vers}\,a)^3}{r^2}=\frac{(\sec a-r)^3}{r}-\frac{3}{2}\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{6}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_9=\frac{(2\,\text{vers}\,a)^4}{r^3}=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{4}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_{11}=\frac{(2\,\text{vers}\,a)^5}{r^4}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4};$$

乃依小矢求大矢式入之，即，

$$\operatorname{vers} m\,a=\frac{m^2(2\operatorname{vers} a)}{\lfloor\underline{2}}-\frac{(m^4-m^2)(2\operatorname{vers} a)^2}{\lfloor\underline{4}\cdot r}$$

$$+\frac{(m^6-5m^4+4m^2)(2\operatorname{vers} a)^3}{\lfloor\underline{6}\cdot r^2}$$

$$-\frac{(m^8-14m^6+49m^4-36m^2)(2\operatorname{vers} a)^4}{\lfloor\underline{8}\cdot r^3}$$

$$+\frac{(m^{10}-30m^8+273m^6-820m^4+576m^2)(2\operatorname{vers} a)^5}{\lfloor\underline{10}\cdot r^4}$$

$$=\frac{m^2(\sec a-r)}{\lfloor\underline{2}}-\frac{(m^4+5m^2)(\sec a-r)^2}{\lfloor\underline{4}\cdot r}$$

$$+\frac{(m^6+25m^4+64m^2)(\sec a-r)^3}{\lfloor\underline{6}\cdot r^2}$$

$$-\frac{(m^8+70m^6+889m^4+1560m^2)(\sec a-r)^4}{\lfloor\underline{8}\cdot r^3}$$

$$+\frac{(m^{10}+150m^8+5313m^6+45800m^4+62136m^2)(\sec a-r)^5}{\lfloor\underline{10}\cdot r^4}$$

爲小割求大矢式,倒置其乘數,即大割求小矢式也

(大矢求小割式)

(證)旣得小割求大矢式,用還原術入之,得大矢求小割式.

命 $\phi'_3=\dfrac{(2\operatorname{vers} m\,a)^2}{m^2}=(\sec a-r)-\dfrac{(m^2+5)(\sec a-r)^2}{3\cdot 4\cdot r}$

$$+\frac{(m^4+25m^2+64)(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}-\frac{(m^6+70m^4+889m^2+1560)(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\ r^3}$$

$$+\frac{(m^8+150m^6+313m^4+45800m^2+62136)(\sec\ a-r)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\ r^4}$$

$$\phi'_5=\frac{(2\ \text{vers}\ m\ a)^2}{m^4\cdot r}=\frac{(\sec\ a-r)^2}{r}-\frac{(2m^2+10)(\sec\ a-r)^3}{3\cdot4\cdot r^2}$$

$$+\frac{(9m^4+150m^2+381)(\sec a-r)^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^3}-\frac{(34m^6+1260m^4+10626m^2+18320)(\sec a-r)^5}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^4}$$

$$\phi'_7=\frac{(2\ \text{vers}\ m\ a)^3}{m^6\ r^2}=\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{(2m^2+10)(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot r^3}$$

$$+\frac{(21m^4+300m^2+759)(\sec a-r)^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4},$$

$$\phi'_9=\frac{(2\ \text{vers}\ m\ a)^4}{m^8\cdot r^3}=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{(4m^2+20)(\sec a-r)^5}{3\cdot4\cdot\ r^4},$$

$$\phi'_{11}=\frac{(2\ \text{vers}\ m\ a)^5}{m^{10}\cdot r^4}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4};$$

即 $(\sec a - r) = \phi'_3 + \dfrac{(m^2+5)\phi'_5}{3\cdot4} + \dfrac{(4m^4+25m^2+61)\phi'_7}{3\cdot4\cdot5\cdot6}$

$$+\frac{(6m^6+245m^4+854m^2+1385)\phi'_9}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}$$

$$+\frac{(576m^8+4100m^6+16653m^4+41550m^2+50521)\phi'_{11}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}$$

$$(\sec a - r) = \frac{(2\operatorname{vers} m\,a)}{m^2} + \frac{(m^2+5)}{3\cdot4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} m\,a)^2}{m^4\cdot r} + \frac{(4m^4+25m^2+61)}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} m\,a)^4}{m^6\cdot r^2}$$

$$+\frac{(36m^6+245m^4+854m^2+1385)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} m\,a)^6}{m^8\cdot r^3}$$

$$+\frac{(576m^8+4100m^6+16653m^4+41550m^2+50521)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} m\,a)^8}{m^{10}\cdot r^4}$$

爲大矢求小割式,倒置其乘數,即小矢求大割式.

(小割求大割式)

(證)有割求矢式,有小矢求大割式,用借徑術入之,即得小割求大割式.

命割求矢式內(2 vers a)爲三率,即,

$$\phi'_3=(2\,\text{vers}\,a)=(\sec a-r)-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}+\frac{1}{4}\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}$$
$$+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_5=\frac{(2\,\text{vers}\,a)^2}{r}=\frac{(\sec a-r)^2}{r}-\frac{2}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_7=\frac{(2\,\text{vers}\,a)^3}{r^2}=\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{6}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_9=\frac{(2\,\text{vers}\,a)^4}{r^3}=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{4}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^5}$$

$$\phi'_{11}=\frac{(2\,\text{vers}\,a)^5}{r^4}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4};$$

乃依小矢求大割式,

$$(\sec ma-r)=m^2(2\,\text{vers}\,a)+\frac{m^2(5m^2+1)(2\,\text{vers}\,a)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(61m^4+25m^2+4)(2\,\text{vers}\,a)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$

$$+\frac{m^2(1385m^6+854m^4+245m^2+36)(2\,\mathrm{vers}\,a)^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$

$$+\frac{m^2(50521m^8+41550m^6+16653m^4+4100m^2+576)(2\,\mathrm{vers}\,a)^8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\ 10\cdot r^4},$$

代入通分相消,得

$$(\sec m\,a-r)=m^2(2\sec a-r)+\frac{m^2(5m^2-5)(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(61m^4-125m^2+64)(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$

$$+\frac{m^2(1385m^6-4270m^4+4445m^2-1560)(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$

$$+\frac{m^2(50521m^8-207750m^6+324093m^4-229000m^2+62136)(\sec a-r)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot r^4},$$

爲小割求大割式,倒置其乘數,卽大割求小割式.

(小弦求大割式)

(證)有弦求割式,有小割求大割式,用借徑術入之,卽得小弦求大割式.

命弦求割式內 $2(\sec a-r)$ 爲三率,卽,

$$\phi'_3=(2\sec a-r)=\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{10}{4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}+\frac{35}{4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\frac{126}{4^4}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_5=\frac{2^2(\sec a-r)^2}{r}=\frac{\sin^4 a}{r^3}-\frac{6}{4}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}+\frac{29}{4^2}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}-\frac{130}{4^3}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_7=\frac{2^3(\sec a-r)^3}{r^3}=\frac{\sin^6 a}{r^5}-\frac{9}{4}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\frac{57}{4^2}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_9=\frac{2^4(\sec a-r)^4}{r^5}=\frac{\sin^8 a}{r^7}-\frac{12}{4}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_{11}=\frac{2^5(\sec a-r)^5}{r^7}=\frac{\sin^{10} a}{r^9},$$

乃依小割求大割式,代入通分相消,得

$$2(\sec ma-r)=m^2(2)(\sec a-r)+\frac{m^2(5m^2-5)(2)^2(\sec a-r)^2}{3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(61m^4-125m^2+64)(2)^3(\sec a-r)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}+\cdots\cdots,$$

即 $$(\sec ma-r)=\frac{m^2\sin^2 a}{\underline{\lfloor 2}\cdot r}+\frac{m^2(5m^2-5)\sin^4 a}{\underline{\lfloor 4}\cdot r^3}+\frac{m^2(61m^4+100m^2+64)\sin^6 a}{\underline{\lfloor 6}\cdot r^5}$$

$$+\frac{m^2(1385m^6+3416m^4+3920m^2+2304)\sin^8\alpha}{\lfloor 8\cdot r^7}$$

$$+\frac{m^2(50521m^8+167200m^6+266448m^4+262400m^2+47456)\sin^{10}\alpha}{\lfloor 10\cdot r^9},$$

爲小弦求大割式,倒置其乘數,即大弦求小割式.

(小切求大割式)

(證)有切求割式,有小割求大割式,用借徑術入之,即得小切求大割式.

命切求割式內$2(\sec\alpha-r)$爲三率,即,

$$\phi'_3=2(\sec\alpha-r)=\frac{\tan^2\alpha}{r}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\tan^4\alpha}{r^3}+\frac{2}{4^2}\cdot\frac{\tan^6\alpha}{r^5}-\frac{5}{4^3}\cdot\frac{\tan^8\alpha}{r^7}+\frac{14}{4^4}\cdot\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_5=\frac{2^2(\sec\alpha-r)^2}{r}=\frac{\tan^4\alpha}{r^3}-\frac{2}{4}\cdot\frac{\tan^6\alpha}{r^5}+\frac{5}{4^2}\cdot\frac{\tan^8\alpha}{r^7}-\frac{14}{4^3}\cdot\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_7=\frac{2^3(\sec\alpha-r)^3}{r^3}=\frac{\tan^6\alpha}{r^5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\tan^8\alpha}{r^7}+\frac{9}{4^2}\cdot\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_9=\frac{2^4(\sec\alpha-r)^4}{r^4}=\frac{\tan^8\alpha}{r^7}-\frac{4}{4}\cdot\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9},$$

$$\phi'_{11}=\frac{2^5(\sec\alpha-r)^5}{r^9}=\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9}$$

乃依小割求大割式,代入通分相消,得

$$(\sec m\alpha-r)=\frac{m^2\tan^2\alpha}{2!\cdot r}+\frac{m^2(5m^2-8)\tan^4\alpha}{4!\cdot r^3}+\frac{m^2(61m^4-200m^2+184)\tan^6\alpha}{6!\cdot r^5}$$

$$+\frac{m^2(1385m^6-6832m^4+12320m^2-8448)\tan^8\alpha}{8!\cdot r^7}$$

$$+\frac{m^2(50521m^8-332400m^6+881328m^4-1148800m^2+648576)\tan^{10}\alpha}{10!\cdot r^9},$$

爲小切求大割式,倒置其乘數,卽大切求小割式.

(小割求大切冪)

(證)有割求切式,有小切求大切式,用借徑術入之,卽得小割求大切冪式.

命割求切式內 $\frac{\tan^2\alpha}{r}$ 爲三率,卽

$$\phi'_3=\frac{\tan^2\alpha}{r}=2(\sec\alpha-r)+\frac{1}{4}\cdot\frac{2^2(\sec\alpha-r)^2}{r},$$

$$\phi'_5=\frac{\tan^4 a}{r^3}=\frac{2^2(\sec a-r)^2}{r}+\frac{2^3}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}+\frac{2^4}{4^2}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3},$$

$$\phi'_7=\frac{\tan^6 a}{r^5}=\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}+\frac{3\cdot 2^4}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{3\cdot 2^5}{4^2}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_9=\frac{\tan^8 a}{r^7}=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{4\cdot 2^5}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_{11}=\frac{\tan^{10} a}{r^9}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

乃依小切求大切式,兩邊自乘,得

$$(\tan m a)^2=m^2\tan^2 a+\frac{(4m^2-4)m^2\tan^4 a}{\lfloor\!\underline{3}\cdot r^2}+\frac{(136m^4-320m^2+184)m^2\tan^6 a}{\lfloor\!\underline{5}\cdot r^4}$$

$$+\frac{(992m^6-3808m^4+4928m^2-2112)m^2\tan^8 a}{\lfloor\!\underline{7}\cdot r^6}$$

$$+\frac{(176896m^8-952320m^6+1964928m^4-1838080m^2+648576)m^2\tan^{10} a}{\lfloor\!\underline{9}\cdot r^8}$$

$$\frac{(\tan m\,a)^2}{r}=m^2\cdot 2\cdot(\sec a-r)+\frac{m^2\cdot(8m^2-5)\cdot 2^2(\sec a-r)^2}{3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(136m^4-200m^2+64)\cdot 2^3\cdot(\sec a-r)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}$$

$$+\frac{m^2(3968m^6-9520m^4+7112m^2-1560)\cdot 2^4\cdot(\sec a-r)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}$$

$$+\frac{m^2(176896m^8-595200m^6+722568m^4-366400m^2+62136)\cdot 2^5\cdot(\sec a-r)^5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot r^4},$$

爲小割求大切冪式,倒置其乘數,卽大割求小切冪式也.

以上割線與各線互求各式證法,幷見徐有壬割圜八線綴術卷三,卷四.就中僅小割求大弦,與小割求大矢四術,可以立術,餘則未能求得差根,故割圜密率卷三,僅記十八術.

21. 夏鸞翔,吳誠,蔣士棟,淩步芳.

夏鸞翔(字紫笙,杭州人,1823–1864)爲項名達弟子,於所著致曲術稱:辛酉

(1861)歲暮,偶用西人微積分推得:

$$a^2=\sin^2 a+\frac{4\sin^4 a}{3\cdot4\cdot r^2}+\frac{4^2\cdot2^2\cdot\sin^6 a}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4}+\frac{4^3\cdot2^2\cdot3^2\cdot\sin^8 a}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^6}+\cdots\cdots,\qquad(1).$$

$$a=r^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2}}\cdot\operatorname{vers}^{\frac{1}{2}}a+T_1\frac{\operatorname{vers}a}{2\cdot2\cdot3\cdot r}+T_2\frac{3^2\cdot\operatorname{vers}a}{2\cdot4\cdot5\cdot r}+T_3\frac{5^2\operatorname{vers}a}{2\cdot6\cdot7\cdot r}+\cdots\cdots,$$

$$=r^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2}}\operatorname{vers}^{\frac{1}{2}}a+\frac{\operatorname{vers}^{\frac{3}{2}}a}{2^{\frac{1}{2}}\cdot\lfloor\underline{3}\cdot r^{\frac{1}{2}}}+\frac{3^2\cdot\operatorname{vers}^{\frac{5}{2}}a}{2^{\frac{3}{2}}\cdot\lfloor\underline{5}\cdot r^{\frac{3}{2}}}+\frac{3^2\cdot5^2\cdot\operatorname{vers}^{\frac{7}{2}}a}{2^{\frac{5}{2}}\cdot\lfloor\underline{7}\cdot r^{\frac{5}{2}}}+\cdots\cdots,\qquad(2).$$

$$=r\left\{\frac{2\operatorname{vers}a}{r}\right\}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\operatorname{vers}a}{2\cdot\lfloor\underline{3}\cdot r}+\frac{3^2\operatorname{vers}^2 a}{2^2\lfloor\underline{5}\cdot r^2}+\frac{3^2\cdot5^2\cdot\operatorname{vers}^3 a}{2^3\cdot\lfloor\underline{7}\cdot r^3}+\cdots\cdots\right),\qquad(2)_b$$

$$a=r\left\{\frac{2\operatorname{vers}a}{r}\right\}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2^2\cdot\operatorname{vers}a}{3\cdot4\cdot r}+\frac{2^2\cdot4^2\cdot\operatorname{vers}^2 a}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r}\right.$$

$$+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ \mathrm{vers}^3\,\alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^8}+\cdots\cdots); \qquad (3).$$

夏鸞翔又撰萬象一原九卷(1862),用正弦微分式自乘後求積分,得,

$$\alpha=r\left\{\frac{\sin^2\alpha}{r^2}+\frac{2^2\cdot\sin^4\alpha}{3\cdot 4\cdot r^4}+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot\sin^6\alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^6}\right.$$

$$\left.+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\sin^8\alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^8}+\cdots\cdots\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (1).$$

吳誠著割圜通解一卷,因董,項,戴,李,徐,夏各家之說,以代數演算,俾其義可以一貫.

此外蔣士棟(無錫人)之弧矢釋李,圜率釋董(1897),則篇幅太簡,未足以盡董,李之旨.凌步芳(字仲儒號賁南,番禺人,?-1902)之割圜捷術通義四卷,則於杜術外增三十二術,并取徑於微積溯源.其第三十術「弧求正切」自註稱:「弧在半象限以下,切線甚小者,可用此術求之」,即,

$$\tan\alpha=\alpha+\frac{1\cdot\alpha^3}{3\cdot r^2}+\frac{1\cdot 2\cdot\alpha^5}{3\cdot 5\cdot r^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\alpha^7}{3\cdot 5\cdot 7\cdot r^6}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\alpha^9}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot r^8}$$

$$+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\alpha^{11}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot r^{10}}+\cdots\cdots. \qquad \text{(近似值)}.$$

(四) 三角函數表計算法

22. 明末三角函數表計算法之輸入

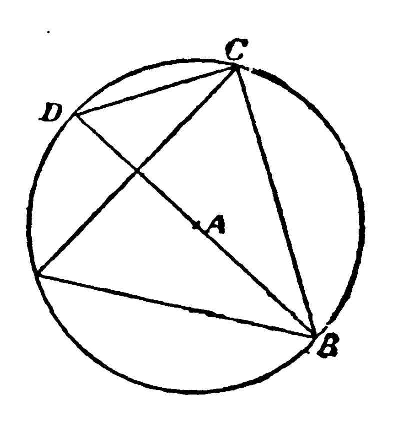
明季耶穌會士輸入三角函數表計算法.論此者有大測二卷,題修政曆法極西耶穌會士鄧玉函(Jean Terrenz,德干司但司人,1621來華,1576-1630卒.)課,湯若望(Johann Adam Schall von Bell,號道未,德哥倫人,1622來華,1591-1666)訂;門人鄭洪猷,陳應登,陳于階,周胤,潘國祥劉有慶受法,徐光啓(1592-1633)督修,崇禎四年(1631)正月二十八日呈進.大測卷一,表原篇第三,先言六宗率,表法篇第四,言三要法,及二簡法;爲計算三角函數表之用.惟僅能得最小之45′函數,以後每越45′,便得一率,直至90°爲止.

先設半徑r=10,000,000,作圜內切六種多邊形,計算其邊數,即得各弧之通弦,如:

宗率一. 圜內六邊等切形,求邊數. 從幾何原本IV,15得邊=10,000,000.

宗率二. 內切圜直角方形,求邊數. 從幾何原本IV,6;I,47得邊=14,142,196.

宗率三.圓內三邊等切形,求邊數. 從幾何原本 XIII, 12.



第四十八圖

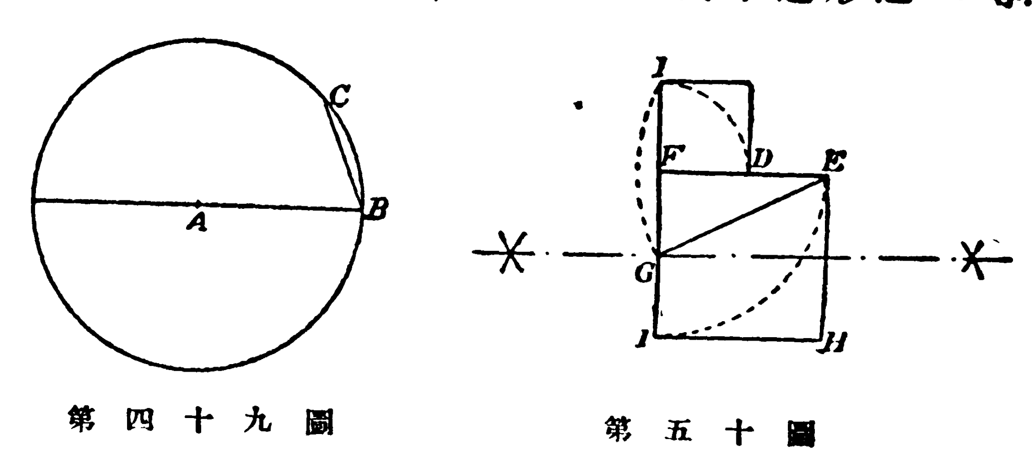
因 $\overline{DB}^2=\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=4\overline{AB}^2$,

$\therefore\quad \overline{BC}^2=3\overline{AB}^2$

知三邊等形內切圓,其各邊上方形,三倍於半徑上方形.由是得邊=17320508.

宗率四. 圓內十邊等切形,求邊數. 從幾何原本 XIII, 9. 言以比例分半徑爲自分連比例,[幾何原本 VI, 30 稱爲理分中末線],其大分卽十邊等形之一邊.

如第四十九圖,及第五十圖 $r=AB=EF$, 用自分連比例法,分爲大小分,其大分 DF 與十邊形之 BC 等.



第四十九圖　　第五十圖

因 $$\overline{AB}^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\overline{EG}^2,$$

$$\therefore\quad EG=11180340;$$

又
$$\overline{AB}^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\overline{EG}^2,$$

$$AB(AB-DF)=\overline{DF}^2$$

則
$$\overline{EG}^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2-AB\cdot DF=\overline{DF}^2,$$

$$\overline{EG}^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+AB\cdot DF+\overline{DF}^2=\left(\frac{AB}{2}+DF\right)^2,$$

$$\therefore\quad DF=EG-\frac{AB}{2}=6180340.$$

由是得邊=6180340.

宗率五. 圓內五邊等切形,求邊數. 從幾何原本XIII,10.言圓內五邊等切形,其一邊上方形,與六邊等形,十邊等形之各一邊上方形幷,等.

即
$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2$$

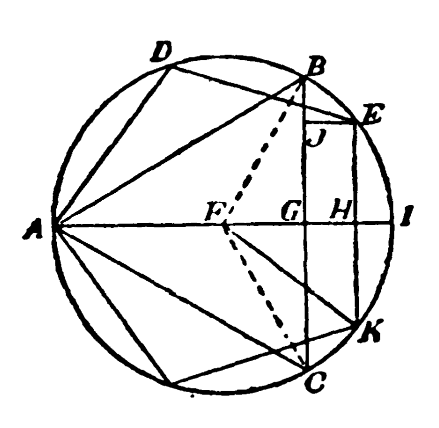
$$\therefore\quad AB=11755704.$$

第五十一圖

由是得邊=11755704.

宗率六. 圓內十五邊等切形,求邊數. 從幾何原本IV,16.知從圓內一點,作一三邊等形,又作一五邊等

形,同以此點爲其一角,從此角求兩形相近之第一差弧,卽十五邊形之一邊.



第五十二圖

如第五十二圖 ABC 三邊等形, $ADEK\cdots\cdots$ 五邊等形之相近第一差弧爲 BE, 卽十五邊等形之一邊.

因 $$BC=17320508,$$

$$EK=11755704,$$

則 $$BJ=\frac{BC-EK}{2}=2782402,$$

又 $$FG=\sqrt{\overline{BF}^2-\overline{BG}^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}$$

$$=5000000,$$

$$FH=\sqrt{\overline{FK}^2-\overline{HK}^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{EK}{2}\right)^2}$$

$$=8090170,$$

則 $$EJ=GH=FH-FG=3090170,$$

$$\therefore\quad BE=\sqrt{\overline{BJ}^2+\overline{EJ}^2}=4158234.$$

由是得邊 $=4158234.$

故「六題總表」: 半之得半弧之半弦:

邊	弧度	弦數	弧度	半弦數	sine
3	120	17320508	60	8660254,	$\sin 60°=0.8660254$,
4	90	14142196	45	7071098,	$\sin 45°=0.7071098$,
5	72	11755704	36	5877852,	$\sin 36°=0.5877852$,
6	60	10000000	30	5000000,	$\sin 30°=0.5000000$,
10	36	6180340	18	3090170,	$\sin 18°=0.3090170$,
15	24	4158234	12	2079117.	$\sin 12°=0.2079117$.

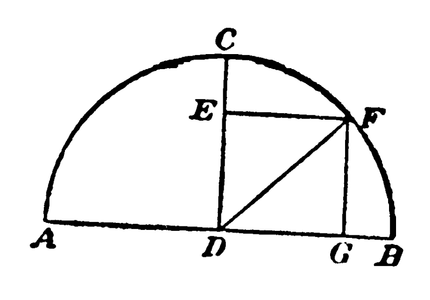
要法一. 前後兩弦,其能等於半徑.

如第五十三圖

$$\overline{DF}^2=r^2=\overline{FG}^2+\overline{EF}^2$$

即 $\sin^2 a+\cos^2 a=1.$

或 $\cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}.$



第五十三圖

要法二. 有各弧之前後兩弦,求倍本弧之正弦.

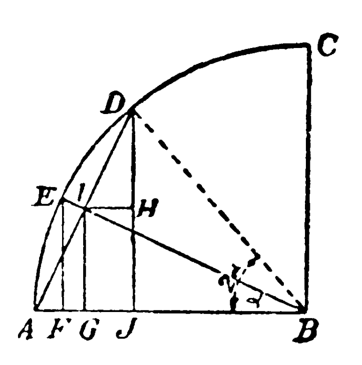
如第五十四圖 $\sin a=EF$,

$\cos a=BF=BI$, $\frac{\sin 2a}{2}=HJ.$

$\triangle BEF=BAI.$

故 $BF=BI=\cos a$

又 $\triangle$s BEF, BIG 兩形之比例等.



第五十四圖

故 $$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{HJ}$$

又 $$\triangle AGI=\triangle IHD,$$

故 $$HJ=\frac{1}{2}DJ=\frac{\sin 2\alpha}{2},$$

即 $$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

要法三. 各弧之全弦上方,與其正半弦上,倍其矢上,兩方幷等.

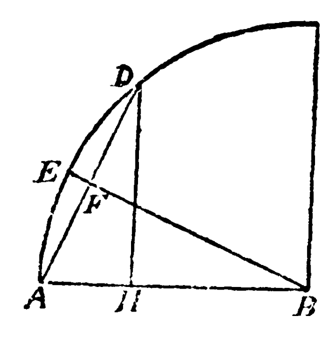
如第五十五圖 $\overline{DH}^2+\overline{AH}^2=\overline{AD}^2$ 是也.

系法. 有一弧之正弦及其餘弦,而求其半弧之正弦.

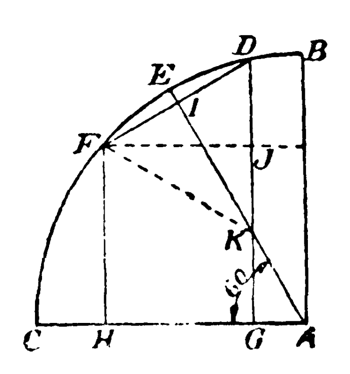
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

或 $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

簡法一. 兩正弦之較,與六十度左右距等弧之正弦等.



第五十五圖



第五十六圖

如第五十六圖 $\triangle DFK$ 成三邊等角形. FD, KD 底平分於 I, 於 J.

即 $$DJ=JK=DI=IF$$

或 $$\sin\alpha=\sin(60^\circ+\alpha)-\sin(60^\circ-\alpha)$$

簡法二. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

既有六宗率,三要法,二簡法.試以12°爲例,

逐次半弧得 $\sin 12^\circ$, $\sin 6^\circ$, $\sin 3^\circ$, $\sin 1^\circ 30'$, $\sin 0^\circ 45'$;

前之餘弧得 $\sin 78^\circ$, $\sin 84^\circ$, $\sin 87^\circ$, $\sin 88^\circ 30'$, $\sin 89^\circ 15'$

前之餘弧可半者半之,得 $\sin 42^\circ$, $\sin 21^\circ$, $\sin 10^\circ 30'$, $\sin 5^\circ 15'$; $\sin 43^\circ 30'$, $\sin 21^\circ 45'$; $\sin 44^\circ 15'$;

前之餘弧 $\sin 48^\circ$, $\sin 69^\circ$, $\sin 79^\circ 30'$, $\sin 84^\circ 45'$, $\sin 46^\circ 30'$, $\sin 68^\circ 15'$, $\sin 45^\circ 45'$;

可半者半之,得 $\sin 24^\circ$, $\sin 34^\circ 30'$, $\sin 17^\circ 15'$, $\sin 39^\circ 45'$, $\sin 23^\circ 15'$;

前之餘弧 $\sin 66^\circ$, $\sin 55^\circ 30'$, $\sin 72^\circ 45'$, $\sin 50^\circ 15'$, $\sin 66^\circ 45'$,

可半者半之,得 $\sin 33^\circ$, $\sin 16^\circ 30'$, $\sin 8^\circ 15'$, $\sin 27^\circ 45'$,

前之餘弧 $\sin 57^\circ$, $\sin 73^\circ 30'$, $\sin 81^\circ 45'$, $\sin 62^\circ 15'$,

可半者半之,得 $\sin 28^\circ 30'$, $\sin 14^\circ 15'$, $\sin 36^\circ 45'$;

前之餘弧 $\sin 61°30'$, $\sin 75°45'$, $\sin 53°15'$;

可半者半之,得 $\sin 30°45'$;

前之餘弧 $\sin 59°15'$.

此皆 12° 所生之率,其他幷如前法,而表之大段可以立具,惟其所得最小之正弦確値,僅至 45′也.此外正切眞數表,小於 45° 之角,用 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 算之;正割眞數表用 $\sec\alpha=\tan\alpha+\tan(45°-\frac{1}{2}\alpha)$ 算之.

清順治間居於南京之穆尼閣(Nicolas Sinogolerski, 1611–1656),[31] 以對數表之說授諸薛鳳祚,方中通,幷兼論三角函數表.天步眞原題大西穆尼閣撰,海岱薛鳳祚增補,中有「三角八線表」及「舊表八線法原」說明三角函數表計算法,大致本諸大測.

又設 $$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}\left\{(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

及 $$\sin\left(\alpha+\frac{\alpha}{3}\right)=\sin\alpha+\frac{1}{6}\sin 2\alpha(\text{略數}),$$

後式設 α 爲極小之角.故已知 $\sin 45'$ 及 $\sin 1°15'$ 可得

(31) 據 Le Rév Père Vanhée 及 David Eugene Smith 之說其詳傳見: Le P. Louis Pfister, S. J., Notices Biographiques et Bibliographiques sur Les Jésuites de l'ancienne mission de Chine Chang-Hai, 1932, pp. 262–265.

sin 1° 之值.

23. 清初中算家之三角函數表計算法

清初中算家論三角函數表計算法者,有李子金,孔興泰,楊作枚,梅文鼎.

李子金算法通義 (1677) 卷五,有「徑背求弦新法說」,天弧象限表 (1683) 有「徑背求弦法,可代象限表」.其徑背求弦新法,創立「立,平,定」三差及「立,曲,平,定」四差,以求各弧之正弦,其法如次:

(1)「創立三差通用法」.

令 $$\frac{d}{2}=100{,}000{,}000,\quad a=157{,}080{,}000.$$

則 $$定差=\frac{157080000}{90}=1745333,$$

$$平差=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(157080000-100000000)\right]\right\}$$

$$=3523.455,$$

$$立差=\frac{1}{90}\times 3523.455=39.1495.$$

因其畸零太多,令立差=39,反求之,得;

$$平差=2\times 3523.455-90\times 39=3536.91 或 3537,$$

$$定差=90\{3537+(3510)\}+\frac{100000000}{90}=1745340.$$

以上述三差所推之數,有少至$\frac{45}{100}$者,李子金另設三差爲38, 3600, 1770000,所推之數,差在$\frac{2}{100}$,較爲密合.

(2)「創立四差通用法」.

如前令 $\frac{d}{2}=100,000,000,\quad a=157080000.$

則 $$定差=\frac{157080000}{90}=1745333,$$

$$平差=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(157080000-100000000)\right]\right\}=2347,$$

$$曲差=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{90}[7046.91-2347]\right\}=17.40,$$

而 $$7046.91=\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(157080000-100000000)\right],$$

$$\frac{1}{90}[7046.91-2347]=52.22,$$

$$立差=\frac{1}{90}(52.22-17.40)=0.3869.$$

因其畸零太多,令立差=0.38, 反求之,得;

$$曲差=52.22-90\times 0.38=18.02, 或 18,$$

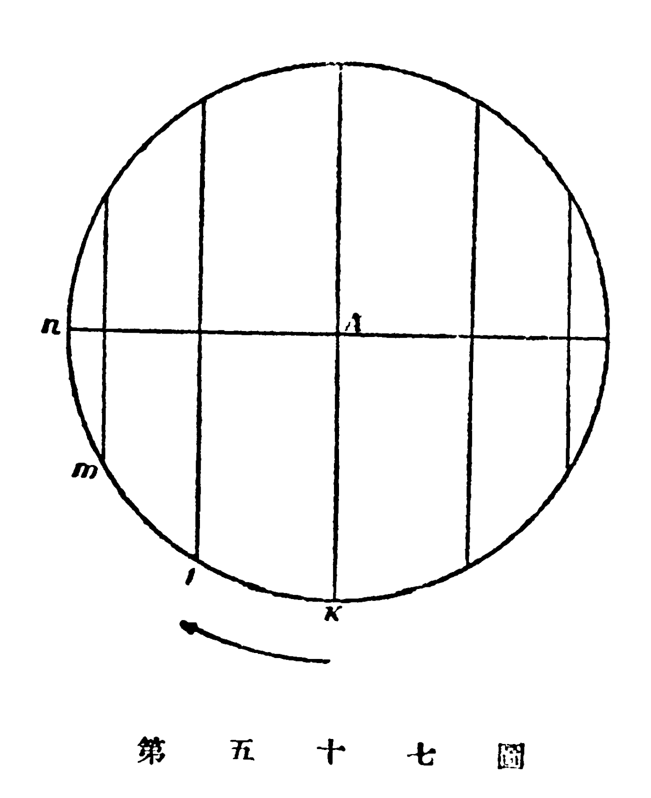
$$平差=7046.91-90\times\{18+34.20\}$$

$$=2348.91 \text{ 或 } 2350,$$

$$定差=90\{2350+4699.91\}+\frac{100000000}{90}$$

$$=1745600.$$

李子金又設「三差法合象限表之圖」而說明之:



第五十七圖

如第五十七圖 $k\ l\ m\ n$ 象限弧平分爲三節,自 k 至 l,似在平行,故謂之平差.自 l 至 m,正當彎曲之處,故謂之曲差.自 m 至 n,其象有似直立,故謂之立差.其四差法求正弦公式爲:

$$\sin m=(1745600m-2350m^2-18m^3-0.38m^4)\div 100000000\left(=\frac{d}{2}\right).$$

其「徑背求弦法,可代象限表」內,求正餘弦公式爲:

$$\cos A=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\left[\{(a^2+a'^2)-d^2\}\times\frac{a^2+a^3+\frac{a^4}{2}}{\left(a^2+a^3+\frac{a^4}{2}\right)+\left(a'^2+a'^3+\frac{a'^4}{2}\right)}\right]}\div\frac{d}{2}$$

$$\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{a'^2-\left[\{(a^2+a'^2)-d^2\}\times\frac{a'^2+a'^3+\frac{a'^4}{2}}{\left(a^2+a^3+\frac{a^4}{2}\right)+\left(a'^2+a'^3+\frac{a'^4}{2}\right)}\right]}\div\frac{d}{2}$$

而 $10\times\frac{3.141}{180^\circ}=0.1745,\ 0.1745\,A=a,\ 0.1745(180^\circ-A)=a',\ d=20.$

* * *

孔興泰著大測精義說明半弧正弦求法.

楊作枚著解割圓之根一卷,以幾何前六卷之法,證明大測中六宗,三要,二簡法諸條之公式,又另創「圓內作九等邊內切形,求得40度之通弦」之法,(1772)

梅文鼎(1633–1721)著平三角舉要五卷,環中黍尺五卷.其平三角舉要卷五,及環中黍尺卷五,以幾何法證:

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B,$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B,$$

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B,$$

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B.$$

24. 清初三角函數表計算法之輸入

明季輸入六宗三要,二簡法之見於大測者,可算得正弦一百二十個,其最小者45′,遞加至90°,其45′以下以比例得之.至數理精蘊(1723刻)下編卷十六又新增四法,即求圓內18, 9, 14, 7邊之法,與六宗相參伍,可得正弦三百六十個,其最小者15′,又有「新增有小弧之正弦,求其三分之一弧之正弦」,即求 $\sin\frac{a}{3}$,可得最小者5′,其5′以下,以比例得之.

(1)求內容十八邊形之一邊幾何. 先設「新增按分作相連比例四率」甲,即「設如以十萬爲一率,作相連比例四率,使一率與四率相加,與二率三倍等,問二率三率四率各幾何?」

蓋由 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4;\quad \phi_1+\phi_4=3\phi_3,$

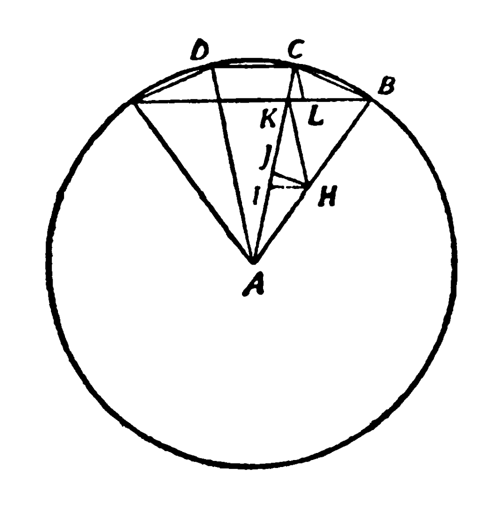
可得方程式:

$$\phi_2{}^3-3\,\phi_1{}^2\phi_2+\phi_1{}^3=0,\quad 而\ \phi_1=100000,$$

次解此方程式,得: $\phi_2=34729,$

代入得 $\phi_3=12061,\quad \phi_4=4187.$

數理精蘊中所示之方程解法,乃1660年之Vieta舊法,稱爲益實歸除法.即令 $\phi_2=\frac{\phi_1{}^3}{3\phi_1{}^2}$ 取其略小之首位而得.其後Newton, Horner二氏改良之法,時尚未發明也.既得ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4,便可應用以求內容十八邊形之一邊.如圖$BC=CD=DE$爲十八邊形之一邊,A爲中心,又作CL平行於AD,聯各線.則△, ABC, BKC, CKL爲相似.



第五十八圖

又 $BE=3BC-KL.$

卽得 $AB:BC=BC:CK=CK:KL,$

又 $AB+KL=3BC.$

故已知AB及上二式之關係,卽可得十八邊形之一邊BC也.

(2)求內容九邊形之一邊幾何.如上圖聯邊卽得.

(3)求內容十四邊形之一邊幾何.先設「新增按分作相連比例四率法」乙,卽「設如以十萬爲一率,作相連比例四率,使一率與四率相加,與二率兩倍再加一率之數等,問二率三率四率各幾何?」.

如上例由 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4,$

及 $\phi_1+\phi_4=2\phi_2+\phi_3$

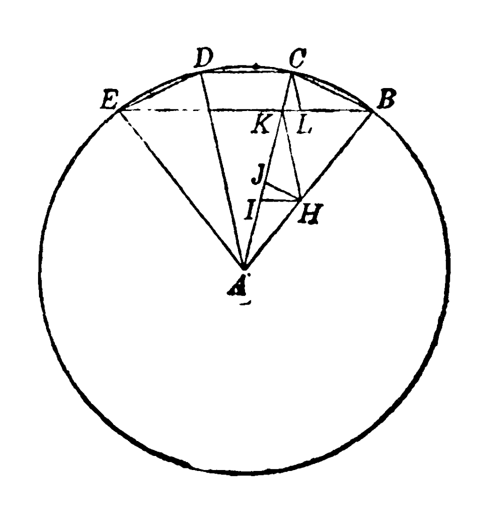
可得方程式 $\phi_2^3-\phi_1\cdot\phi_2^2-2\phi_1^2\cdot\phi_2+\phi_1^3=0$

而 $a=100000,$

次解此方程式,得: $\phi_2=44504,$

代入得 $\phi_3=19806,\quad \phi_4=8814.$

此乃用1660年之Vieta舊法,卽令$\phi_2=\frac{\phi_1^3}{2\phi_1^2}$取其略小之首位而得.既得$\phi_2,\phi_3,\phi_4,$便可應用以求內容十四邊形之一邊.



第五十九圖

如第五十九圖 $BC=CD=DE$ 爲十四邊形之一邊，A 爲中心，又作 CL 平行於 AD，聯各線．則 $\triangle$。ABC, BKC, CKL 爲相似．又自 K 作 KH 平行於 AD，交 AB 於 H；自 H 作 HI, HJ，平行於 BE, BC.

則 $$\triangle AHJ=\triangle KHI,$$

又 $$\triangle HIJ=\triangle CKL.$$

則 $$AB=AK+KC=2BC+CK-KL,$$

即 $$AB+KL=2BC+CK.$$

故已知 AB 及上二式之關係，卽可得十四邊形之一邊 BC 也．

(4)求內容七邊形之一邊幾何。如上圖聯 BD 邊卽得．

* * *

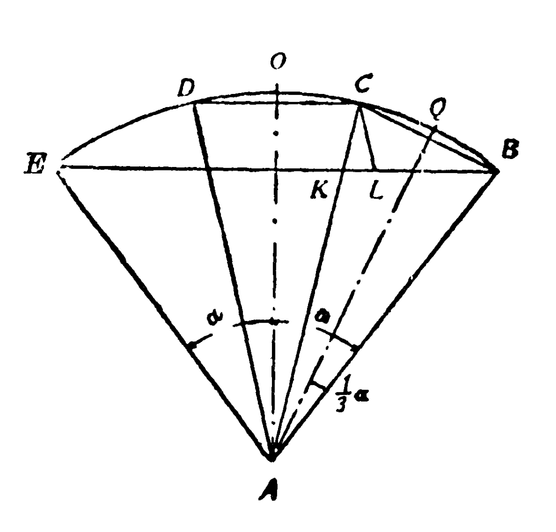
「新增有本弧之正弦，求其三分之一弧之正弦」．

如第六十圖 $\angle OAB=\angle\alpha$,

$$\angle EAB = \angle 2\alpha$$

又 $$\angle QAB = \angle \frac{1}{3}\alpha,$$

$$\angle CAB = \angle \frac{2}{3}\alpha.$$



第六十圖

如前圖 $BC=CD=DE$ 爲 $\frac{2}{3}\alpha$ 之弧，A 爲中心，又作 CL 平行於 AD，聯各線，則 $\triangle$s ABC, BKC, CKL 爲相似.

又 $$BE = 3\,BC - KL,$$

卽得 $$AB : BC = BC : CK = CK : KL.$$

令 $$r = 1,$$

則 $$1 : 2\sin\frac{1}{3}\alpha = (2\sin\frac{1}{3}\alpha)^2 : \left\{3(2\sin\frac{1}{3}\alpha) - 2\sin\alpha\right\}$$

$$\therefore \quad (2\sin\frac{1}{3}\alpha)^3 - 3(2\sin\frac{1}{3}\alpha) + 2\sin\alpha = 0.$$

$$\sin\alpha = 3\sin\frac{1}{3}\alpha - 4\sin^3\frac{1}{3}\alpha.$$

或 $$x^3 - 3x + 2\sin\alpha = 0, \quad 而 \quad x = 2\sin\frac{1}{3}\alpha.$$

其 x 之同數，可由益實歸除法求得.

其後余熙(字晉齋，桐城人)著八線測表圖說一卷，見四庫全書總目卷一〇七，子部，天文算法類存目；何

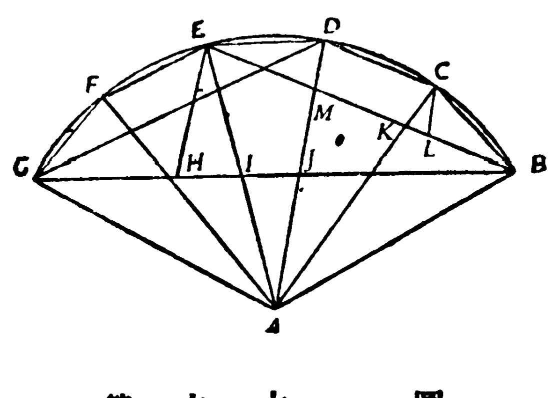
蔘瑶(字報之,南海人,雍正庚戌,1730進士)著算迪十二卷,其卷三有「割圜作八線表法」,屈曾發(字省園,虞山人)著數學精詳十三卷(1772年自序),其卷十一有「六宗三要二簡法說」;厲之鍔(字寶青,錢塘人)著悉緯瑣言(1800);并本數理精蘊之說.

25. 汪萊安淸翹之五分取一法

「割圜非八線不可,而八線所由來,舊有六宗三要二簡法,然所得僅五分弧耳.每得五分,而得一通弦.其間二百九十九秒之八線,皆由中比例而得.且其以小弧求大弧,僅有求倍弧一法.以大弧求小弧,僅有求半弧,求三分之一之弧二法.其三分取一一法,已須用益實歸除.[詳數理精蘊下編卷十六,羅茗香(士琳1783?-1853)贅曰:益實歸除卽是元人正負開方之法],甚屬不易.更無五分取一,七分取一之法.歙縣汪孝嬰(萊,1768-1813)創爲五分取一一法,且曰,由是而通變之,可得七分取一等法,其意蓋欲以補六宗三要所未備也.」[32]其所著衡齋算學第三册(1798),「平圓形」有:

(32) 見陳杰算法大成上編卷三第56頁,浙江書局重刊本.

「有圓內若干度之通弦,求其度五分之一通弦」,



第六十一圖

如第六十一圖如前各家之例,先聯各線,次作 $CL \parallel DA$, $EH \parallel DA$,則得前三△ₛ之大△ ABC, 小△ BCK, 又小△ CKL. 又得次設△ BMJ, 及後設二△ₛ之大 BEH, 小△ EHL:此六△ₛ並爲相似.

令 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$, 爲比例式之1, 2, 3, 4率,

則
$$AB = r = 1 = \phi_1,$$
$$BC = 2\sin\alpha = \phi_2,$$
$$CK = \phi_3,\ KL = \frac{{\phi_2}^3}{{\phi_1}^2} = \phi_4;$$
$$BE = 2\sin 3\alpha = 3\phi_2 - \phi_4,$$
$$BG = 2\sin 5\alpha.$$

又
$$BJ = BM = GI = 2BC - KL = 2\phi_2 - \phi_4,$$
$$IJ = DE - HI = BC - HI.$$

$$\therefore \quad BG=5BC-HI-2KL,$$

由此可求得方程式:

$$\sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$$

惟汪萊不遑求上之方程式,而設下之解法:

卽因 $$\frac{BC}{KL}=\frac{BE}{HI},$$

已知 $BC=\phi_2,\ KL=\phi_4,\ EB=3\phi_2-\phi_4,$

則 $HI=3\phi_4-\phi_6,$ 而 $\phi_6=\frac{\phi_4^2}{\phi_2}.$

故 $BG=2\sin 5\alpha=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$

(此與明安圖 I°, d° 之說相同).

或 $$\frac{2\sin 5\alpha}{5}=\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}.$$

而稱: $\frac{2\sin 5\alpha}{5}$ 爲第一數, ϕ_2 爲第二數, ϕ_4 爲第三數, $\frac{\phi_6}{5}$ 爲第四數, $\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}$ 爲第五數.其法假設一 b 數,使

$$\frac{2\sin 5\alpha}{5}+b=\phi_2,$$

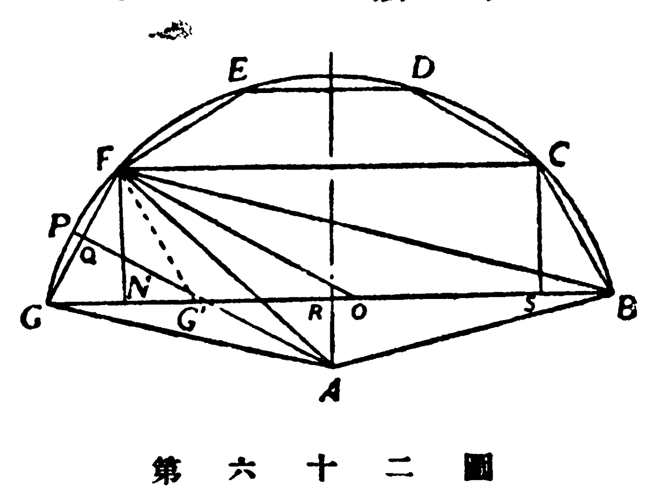
其中 $\phi_4=\frac{\phi_2^3}{\phi_1},\quad \frac{\phi_6}{5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{\phi_4^2}{\phi_2},$

則前之方程式,幷化爲 ϕ_2 之同數.如代入之 b 數,可使

$$\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}=\frac{2\sin 5\alpha}{5}$$

則 $\phi_2=2\sin\alpha$ 爲所求密數.反之,若第五數少於第一數,則如前法加位求之;若第五數多於第一數,則退次位求之,三位以下做此.是處脫胎於數理精蘊中「益實歸除」之代入法也.其時四次式以上解法,在國中尙無善法;故汪萊設爲此例.

安淸翹(1759-1830)矩線原本(1818)以幾何法證 $\sin 3\alpha$, $\sin 5\alpha$. 其 $\sin 5\alpha$ 之證法如下:



第六十二圖

如第六十二圖 $\angle GAB=10\alpha$, $\sin 5\alpha=GR$;

$\angle GAP=\alpha$, $\sin\alpha=GQ$.

自 F 作 GB 之垂線 FN,

又作 $\triangle FNG'=\triangle FNG$, $G'O=FG'$.

因 $\angle FGB=4\alpha$,

$$\therefore \quad \angle GOF = 2\alpha,$$

又 $\angle OFB = \alpha.$

而 $\overline{GF}^2 - \overline{GN}^2 = \overline{FO}^2 - \overline{NO}^2$, 或 $\overline{NO}^2 - \overline{GN}^2 = \overline{FO}^2 - \overline{GF}^2$

卽 $(\sin 5\alpha - \sin\alpha + 4\sin^3\alpha)^2 - (\sin 5\alpha - 3\sin\alpha + 4\sin^3\alpha)^2$

$$= (4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha)^2 - (2\sin\alpha)^2,$$

或 $\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha.$ 證訖.

其後陳維祺纂輯中西算學大成一百卷,(1889 自識),楊兆鋆著須曼精廬算學 (1898 江衡序),雖亦論述倍數正弦算法,則多因襲舊說,且在清季造三角比例表法輸入之後也.

在前則董祐誠之圓率解析法,實受汪萊之影響.董於割圜連比例圖解,自稱:「舊法求弦矢,……用益實歸除,汪氏萊更補求五分之一通弦術,商除進退,皆難遽定」,乃立「弦矢互求四術」,是也.

26. 清季造三角比例表法之輸入

同治三年(1877),華蘅芳,傅蘭雅 (Dr. John Fryer) 共譯英海麻士(原名不詳, Hymers?)三角數理十二卷,其卷三論造三角比例表之法,有下之各款:

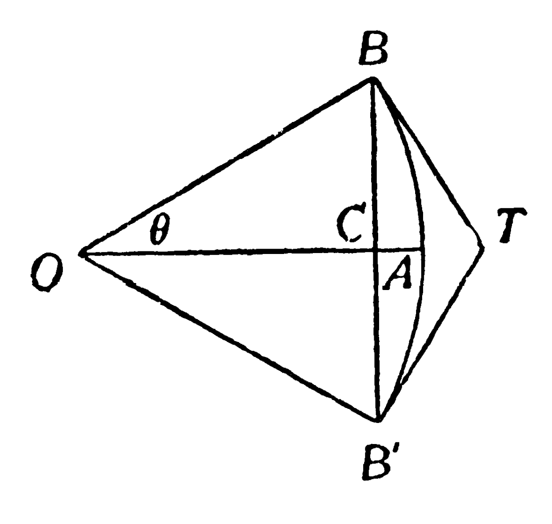
(59)款. 設$\theta<\frac{1}{2}\pi$

則 $\sin\theta<\theta<\tan\theta$

如圖 $\frac{BC}{OB}<\frac{BA}{OB}<\frac{BT}{OB}$

但 $\frac{BC}{OB}=\sin\theta,\ \frac{BA}{OB}=\theta,$

$\frac{BT}{OB}=\tan\theta$



第六十三圖

故 $\sin\theta<\theta<\tan\theta.$ 證訖.

(60)款. 設θ漸變小至0,則$\frac{\sin\theta}{\theta}$與$\frac{\tan\theta}{\theta}$必漸近於1,而其值爲1.

因θ在$\sin\theta$,$\tan\theta$之間,則$\frac{\sin\theta}{\theta}$比$\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$或$\frac{1}{\cos\theta}$更近於1.

因 $\frac{\sin\theta}{\theta}<1<\frac{1}{\cos\theta}$

故也.但θ變至甚小,則$\frac{1}{\cos\theta}$之限爲1,所以θ變至甚小$\frac{\sin\theta}{\theta}$之限亦必爲1;

又因 $\frac{\tan\theta}{\theta}=\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\cos\theta},$

所以θ變至甚小,$\frac{\tan\theta}{\theta}$之限亦必爲1也.

(61)款. 依前款之例,知$\theta<\frac{1}{2}\pi$,

則 $$\sin\theta>\theta-\frac{\theta^3}{4}.$$

蓋 $$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}>2\times\frac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

而 $$\frac{\theta}{2}<\tan\frac{\theta}{2},\quad \frac{\theta}{2}>\sin\frac{\theta}{2},$$

故 $$\sin\theta>\theta\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right),$$

(62)款. 求$\sin 10''$, $\cos 10''$.

命 $\theta=\frac{\pi}{64800}$為$10''$角之眞弧.

因 $\sin 10''>\theta-\frac{\theta^3}{4}$, $\sin 10''<\theta$, $\theta=0.000048481368110$,

因 $$\sin 10''>\theta-\frac{\theta^3}{4}>\theta-\frac{(0.00005)^3}{4},$$

卽 $\sin 10''>0.000048481368078$,

而 $\sin 10''<\theta<0.000048481368110$.

故可令, $\sin 10''=0.000048481368$,

代入得 $\cos 10''=0.9999999988248$.

有此則每$10''$距離之正餘弦,可以$\sin(A+\theta)$, $\cos(A+\theta)$

兩公式求之.

(64)款以後又設下列公式爲算表之用:

$\sin(60^\circ+A)=\sin A+\sin(60^\circ-A)$ (大測簡法一)

$\tan(45^\circ+A)=2\tan 2A+\tan(45^\circ-A)$ (Cagnoli).

$$\sec A=\frac{1}{2}\left[\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)+\cot\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$\sin A+\sin(72^\circ+A)-\sin(72^\circ-A)=\sin(36^\circ+A)-\sin(36^\circ-A). \quad \text{(Euler).}$$

$$\cos A+\cos(72^\circ+A)+\cos(72^\circ-A)=\cos(36^\circ+A)+\cos(36^\circ-A). \quad \text{(Euler).}$$

至徐有壬著造各表簡法,所述造正弦全表,造正矢全表,造正切全表,造八線對數全表四術,則係級數演算法(Calculation by Series),其術與證,已見前章,茲不復贅.

李善蘭年譜

序，民國六年(1917)曾着意爲中算名家梅文鼎，李善蘭，華蘅芳三先生，各編一年譜．關於李善蘭事蹟，則徵訪於其高徒席翰伯(淦)先生．而翰伯先生適以是年歸道山．幸由其哲嗣翊鄉(德鳳)兄搜集殘稿見示，得略識一二．年來稍稍留意此事，迄未有多得．乃於去歲勉強成稿，用完素願，又以原稿寄杭州裘沖曼先生，得補列數條．玆並彙錄，就正當世．其並世國中算學家著述大略，亦如梅文鼎年譜之例，附記另行，並冠單圖爲誌．

年譜

清嘉慶十五年庚午(1810)，一歲．

張鳴珂，疑年賡錄稱：「李壬叔七十三善蘭，生嘉慶十五年(1810)庚午，卒光緒八年(1882)壬午」.[1] 善蘭家在浙江海寧縣硤石鎭北之路仲市．(裘沖曼徵訪)

○是年金山顧觀光(1799-1862)已十二歲，烏程

---

(1) 見張鳴珂，疑年賡錄卷二，或武進張惟驤疑年錄彙編卷一二，第11頁，乙丑(1925)嘉平月，小雙寂庵刻本．

徐有壬(1800-1860)已十歲,杭州戴煦(1805-1860)已六歲,南匯張文虎(1808-1885)已三歲,均在他年爲善蘭談算之友.

嘉慶十六年辛未(1811),二歲.

○是年李潢(?…1811)卒.李潢有輯古算經考注上,下卷:九章算術細草圖說九卷,附海島算經細草圖說.

○是年垣曲安清翹(1759-1830)自序推步惟是四卷.(2)

○是年十月海州許桂林(1778-1821)自序算牖四卷.(3)

嘉慶十七年壬申(1812),三歲.

○是年汪曰楨(1812-1881)生.

○是年十月左宗棠(1812-1885)生.(4)

嘉慶十八年癸酉(1813),四歲.

○是汪萊(1768-1813)卒.汪萊有衡齋算學七卷,衡齋遺書共七種,九卷.

---

(2) 見推步惟是,數學五書本.

(3) 見算牖,道光庚寅(1830)冬刻本.

(4) 見左文襄公年譜十卷,光緒丁酉(1897)湘陰左氏校刻本.

嘉慶十九年甲戌(1814),五歲.

○是年仲冬紀大奎(1746-1825),撰筆算便覽五卷.

嘉慶二十年乙亥(1815),六歲.

○是年六月山陽駱騰鳳(1770-1841)自序開方釋例四卷.(5)

嘉慶二十一年丙子(1816),七歲.

○是年張作楠撰翠微山房數學共十五種,三十八卷.

嘉慶二十二年丁丑(1817),八歲

○是年李銳(1768-1817)卒.李銳有李氏遺書共十一種十八卷;測圓海鏡細草十二卷.

○是年仲秋垣曲安淸翹自序一線表用六卷.(6)

嘉慶二十三年戊寅(1818),九歲.

○是年徐壽(1818-1884)生.(7)

○是年孟冬垣曲安淸翹自序矩線原本五卷.(8)

---

(5) 見開方釋例四卷,何錦道光癸卯(1843)校刻本.

(6) 見一線表用,數學五書本.

(7) "徐雪村六十七,壽生嘉慶二十三年(1818)戊寅,卒光緒十年(1884)甲申,"見武進張惟驤疑年錄彙編(1925)卷一四,第19頁.

(8) 矩線原本,數學五書本.

○是年甘泉范凌霆序甘泉羅士琳(?-1853)比例匯通四卷.[9]

嘉慶二十四年己卯(1819),十歲.

「善蘭年十齡,讀書家塾,架上有古九章,竊取閱之,以爲可不學而能,從此遂好算」.[10]

○是年正月嘉興錢儀吉序陳杰輯古算經細草一卷,圖解三卷,音義一卷.

○是年夏四月陽湖董祐誠(1791-1823)自序割圜連比例圖解上中下卷.

○是年鄒伯奇(1819-1869)生.

嘉慶二十五年庚辰(1820),十一歲.

○是年開化戴敦元(1768-1834)序刻李潢遺著九章算術細草圖說十卷,由語鴻堂刻行.

○是年全椒江臨泰序金華張作楠食田通法十四卷.[11]

○是年焦循(1763-1820)卒.焦循有里堂學算記共五種,十六卷;開方通釋一卷,補衡齋算學第三

(9)比例匯通,光緒丙申(1896)石印本.

(10) 見李善蘭則古昔齋算學自序,同治丁卯(1867)南京刻本.

(11) 見翠微山房數學,光緒丁酉(1897)石印本.

册[12]

道光元年辛巳(1821),十二歲.

○是年六月陽湖董祐誠自序橢圜求周術一卷.

○是年八月陽湖董祐誠自序斜弧三邊求角補術一卷.

○是年八月陽湖董祐誠自序堆垜求積術一卷.

○是年十二月陽湖董祐誠自序三統術衍補一卷.

○是年許桂林(1778-1821)卒.[13]許桂林有立天元一導窽三卷;[14]算牖四卷.

道光二年壬午(1822),十三歲.

○是年江臨泰自序弧三角舉隅一卷.

道光三年癸未(1823),十四歲

○是年大興徐松序刻陳杰輯古算經細草一卷,圖解三卷,音義一卷.[15]

○是年夏鸞翔(1823-1850),李錫蕃(1823-1850)生.

---

(12) 木犀軒叢書,易餘籥錄本.

(13) 此據閔爾昌,五續疑年錄;生乾隆戊戌(1778),卒道光辛巳(1821)

(14) 羅士琳續疇人傳作四卷,許喬林算牖跋,作三卷,未知孰是.

(15) 見緝古算經,道光庚子(1840)重刻本.

○是年董祐誠(1791-1823)卒.[16]董祐誠有董方立遺書十六卷.

道光四年甲申(1824),十五歲.

「善蘭年十五時,讀舊譯(幾何原本)六卷,通其義」.[17]

○是年強汝詢(1824-1894)生.

道光六年丙戌(1826),十七歲.

○是年甘泉羅士琳自序句股容三事拾遺三卷.

道光七年丁亥(1827),十八歲.

○是年羅士琳撰演元九式一卷.

道光八年戊子(1828),十九歲.

○是年開化戴敦元(1768-1834)序甘泉羅士琳句股容三事拾遺三卷,昌平王萱齡,烏程徐有壬亦序此書.

○是年阮元序羅士琳演元九式稱:「嘉慶間元得元大德朱世傑四元玉鑑三卷,……以副鈔本屬何君夢華,付之李君尚之(銳),略演其法,李君遽卒.吾鄉羅君茗香(士琳)乃取此書各段,演全細草,又於四草外演爲九式一卷.」

---

(16) 見李兆洛"董方立傳,"冠董方立遺書前.

(17) 見李善蘭幾何原本後九卷序(1587).

道光十年庚寅(1830),二十一歲.

○是年夏六月張琦序董祐誠遺著董方立遺書十六卷.

○是年華蘅芳(1830-1902)生.

○是年安清翹(1759-1830)卒.(18)安清翹有數學五書共十九卷.

道光十二年壬辰(1832),二十三歲.

○是年嘉應吳蘭修校刻李潢輯古算經考注上下卷,云距(李潢)先生之沒垂二十年.此書題「王孝通撰并注,李潢述劉衡校.(19)

○是年順德黎應南序羅士琳句股截積和較算術二卷.(20)

○是年順德黎應南序項名達之句股六術.

○是年丁取忠始習算.(21)

道光十四年甲午(1834),二十五歲.

---

(18) 安清翹家傳,及李宗昉所撰墓碑銘,稱清翹以道光庚寅(1830)卒,年七十二.未刊算稿有數學指南,周易比例,幾何原本補正,數種.

(19) 見輯古算經考注二卷本.

(20) 見句股截積和較算術二卷.道光二十八年(1848)靈石楊氏刻本.

(21) 見丁取忠粟布演草識,白芙堂叢書本.

○是年冬羅士琳四元玉鑑細草二十四卷甫經脫稿.[22] 羅士琳曾作後記.[23]

○是年戴敦元(1768-1834)卒.

○是年張敦仁(1754-1834)卒.張敦仁有緝古算經細草三卷;求一算術上,中,下卷;開方補記八卷,附通論一卷.

道光十五年乙未(1835),二十六歲.

○是年羅士琳四元玉鑑細草由李棠寫樣.[24]

道光十六年丙申(1836),二十七歲.

○是年仲春瓊州張岳崧題刻甘泉易之瀚四元釋例一卷.

道光十七年丁酉(1837),二十八歲.

○是年夏羅士琳自序臺錐積演一卷.

○是年十一月戴熙序刻謝家禾遺著衍元要義弧田問率,直積回求凡三卷,稱謝穀堂算學三種.

---

(22) 見易之瀚四元玉鑑細草後記,附觀我生室彙稿本四元玉鑑細草後.

(23) 見羅士琳四元玉鑑細草後記,附觀我生室彙稿本四元玉鑑細草後.

(24) 見李棠四元玉鑑細草後跋,附觀我生室彙稿本四元玉鑑細草後.

道光十八年戊戌(1838),二十九歲.

○是年秋張岳崧序羅士琳四元玉鑑細草二十四卷.

道光十九年己亥(1839),三十歲.

○是年秋天長岑建功校刻明安圖遺著割圜密率捷法四卷.

○是年秋甘泉羅士琳撰割圜密率捷法後跋.

○是年七月吳縣馮桂芬(1810-1874)自序弧矢算術細草圖解一卷.

○是年七月羅士琳撰算學啓蒙識誤及後記.

○是年九月揚州阮元序刻元朱世傑算學啓蒙三卷.

道光二十年庚子(1840),三十一歲.

李善蘭天算或問卷一,稱:「善蘭自束髮學算,三十後所造漸深」.[25]

○是年夏四月阮元序羅士琳續疇人傳六卷.

○是年阮元序羅士琳三角和較算例一卷.

○是年阮元序明安圖遺著割圜密率捷法四卷.

○是年趙元益(1840-1902)生.

---

(25) 見天算或問,則古昔齋算學本.

道光二十一年辛丑(1841),三十二歲.

○是年駱騰鳳(1770-1841)[26]卒.駱騰鳳有藝游錄二卷;開方釋例四卷.

道光二十三年癸卯(1843),三十四歲.

○是年駱騰鳳壻何錦刻駱騰鳳遺著藝游錄二卷,開方釋例四卷.

○是年秋羅士琳自序弧矢算術補.

○是年冬項名達自序三角和較術一卷.

道光二十四年甲辰(1844),三十五歲.

○是年秋九月全椒金望欣序烏程陳杰算法大成稱「上編先已梓行」.

道光二十五年乙巳(1845),三十六歲.

席淦(1845-1917)殘稿稱善蘭以「道光乙巳年(1845)館嘉興陸費家,交當時江浙名士如張嘯山(文虎)孫次山(瀜),顧尙之(觀光)等」.李善蘭於是年冬以所著四元解二卷示顧觀光.[27]李善蘭序四元解稱「汪君謝城(曰楨)以手鈔元朱世傑四元玉鑑三卷見示,

(26) 見丁晏"安徽舒城縣訓導駱先生傳,"附開方釋例卷四後.

(27) 見顧觀光算賸續編內「四元解序」.

……深思七晝夜,盡通其法……」[28]

○是年項名達自序開諸乘方捷術一卷,由長洲陳奐署簽.

○是年秋戴煦(1805-1860)自序對數簡法二卷.

○是年冬南海江藩序南海何夢瑤算迪八卷,由粵雅堂刻行.

○是年席淦(1845-1917)生.

道光二十六年丙午(1846),三十七歲.

是年顧觀光序李善蘭所著四元解,對數探原.其於四元解序稱「李君又有弧矢啓祕」.[29]

○是年秋八月戴煦自序續對數簡法一卷.

道光二十七年丁未(1847),三十八歲.

○是年英國偉烈亞力(Wylie Alexander)來華,寓滬城北關外,日與華人相討論.[30]

○是年海山仙館叢書刻幾何原本,同文算指,圜容較義,測量法義,測量異同,句股義,諸書.

道光二十八年戊申(1848),三十九歲

(28) 見四元解,則古昔齋算學本.

(29) 見顧觀光算賸續編內"四元解序".

(30) 見偉烈亞力數學啓蒙,金咸福跋.

是年仲秋李善蘭自序麟德術解三卷.[31]

道光二十九年己酉(1849),四十歲.

是年李善蘭居嘉興. 按張文虎華嚴墨海集稱「道光二十九年(1849)夏,與錢君葆堂(熙哲)[32]寓禾郡幻居庵.庵僧出示明賢分寫華嚴經八十一卷,……」[33],又張文虎舒藝室詩存三,稱:「偕錢叔保(熙哲)寓禾城幻居庵,坐雨不得出.李(善蘭),孫(溉),楊(韵),于(源),何(呂治),朱大令(緒曾),輒相過話雨,觀所藏明季諸賢分寫華嚴經墨跡,雜記以詩,用少陵重過何氏山林韻.……」又註稱:〔李君(善蘭)精究中西算術,近從(陳奐)碩甫受經〕」.[34]

○是年江寧管嗣復序桐城葉棠天元一術圖說一卷.

○是年十月項名達自序象數一原.[35]

○是年阮元卒.

---

(31) 見則古昔齋算學六,麟德術解卷一,第1頁.

(32) 按錢熙哲字叔保亦字葆堂,錢樹芳第四子,熙祚弟.

(33) 見張文虎舒藝室雜著乙編上,第32頁.

(34) 見張文虎舒藝室詩存三,第21頁.

(35) 見象數一原七卷,光緒戊子(1888)上海刻本.

道光三十年庚戌(1850),四十一歲.

是年指海刻成,收有李善蘭對數探源一種,張文虎校.

○按張文虎金山錢氏家刻書目序稱:「道光中錫之(錢熙祚)通守輯守山閣叢書及指海」[36]又告靈文稱:「道光二十四年(1844)正月……金山錢君雪枝(熙祚)卒於京師」.[37] 又候選訓導錢君(熙經1796-1849)[38]殯志稱:「錫之邀予同至京師,明年錫之歿,予南歸,(熙經)君握予手曰,錫之已矣,指海稿未竟,盍贊成之乎?予曰然.又六年指海竣事……」.[39]觀此則指海蓋成於此年也.

○是年項名達(1789-1850)卒.項名達有下學盦算術共三種三卷,象數一原六卷.

○道光末年英人麥都思(Dr. Medhurst Walter Henry, 1796-1857)設墨海書館(是爲機器印書之始,以牛力曳之)於滬北,延王韜主筆政.所交多海內知

(36) 見張文虎舒藝室賸稿第24頁.

(37) 見張文虎舒藝室雜著乙編卷下,第73頁.

(38)「錢熙經生於嘉慶元年四月,卒於道光二十九年十有一月,…」見張文虎舒藝室雜著乙編卷下,第62-63頁.

(39) 見張文虎舒藝室雜著乙編卷下第62頁.

名士.與李善蘭,蔣敦復以詩酒徜徉於海上,時人目爲三異民,…….(40)

成豐元年辛亥(1851),四十二歲.

是年善蘭獲交錢唐戴煦,以所著對數探源,弧矢啓祕見貽.(41)張文虎稱:「成豐之初(錢熙輔)鼎卿學博續輯藝海珠塵壬癸二集,及刊西人重學」.(42) 藝海珠塵壬癸集,收有李善蘭,方圓闡幽,弧矢啓祕二種.按李善蘭序則古昔齋算學(1867)稱:「方圓(闡幽),弧矢(啓祕),對數(探源)三種,金山錢氏已刻入叢書中」是也.

○錢熙輔,清金山人,字鼎卿,官蕪湖教諭.婦翁吳省蘭刊藝海珠塵,至八集而止.熙輔續輯壬癸二集,以竟其業.(43)

○是年鄒漢勳序丁取忠數學拾遺一卷.

成豐二年壬子(1852),四十三歲.

---

(40) 見淞南夢影錄卷三.(裘沖曼徵訪)
但據(Couling, The Encyclopœdia Sinica, 1917, p. 344.)則謂墨海書館設立在道光二十三年(1843).

(41) 見戴煦粵雅堂叢書本外切密率序第1-2頁.

(42) 見張文虎舒藝室雜稿第42頁"金山錢氏家刻書目序."

(43) 見中國人名辭典第1618頁.

是年五月李善蘭至滬,居大境傑閣.[44]

善蘭稱:「歲壬子(1852)余遊滬上,……朝譯幾何,暮譯重學,閱二年同卒業」.[45]按閱二年當作閱四年.

是年戴煦外切密率自序稱:「去歲獲交海昌壬叔李君(善蘭),以所著對數探源,弧矢啓祕見示.其對數探源,與予對數簡法後一術殊途同歸.而弧矢啓祕則用尖堆立算,別開生面,兼有割線諸術,特未及餘弧耳.線出予未竟殘稿,請正.而壬叔頗賞予餘弧與切割二線互求之術,再四促成.今歲又寄札詢及,遂謝絕繁冗,扃戶鈔錄,閱月乃竟.嗟乎!友朋之助,曷可少哉!……茲非壬叔之勸成,則以予之懶散,必至廢擱以終其身……」.[46]

善蘭稱:「歲壬子(1852)來上海,與西士偉烈亞力約,續徐利二公未完之業.偉烈君無書不覽,尤精天算,且熟習華言.遂以六月朔爲始,日譯一題.中間因應試避兵諸役,屢作屢輟,凡四歷寒暑,始卒業」.[47]

(44) 見王韜瀛壖雜誌卷四.

(45) 見李善蘭重學二十卷附曲線說三卷,序,同治五年(1866)刻本.

(46) 見粵雅堂叢書本外切密率序第1-2頁.

(47) 見李善蘭幾何原本序,同治四年(1865)刻本.

○是年歲杪戴煦自序求表捷術共四種九卷.

咸豐三年癸丑(1853),四十四歲.

○是年偉烈亞力(Wylie Alexander)稱:「余自西土遠來中國,以傳耶穌之道爲本.餘則兼習藝能.爰述一書曰數學啓蒙,凡二卷,舉以授塾中學徒,由淺及深,則其知之也易.譬諸小兒,始而匍匐,繼而扶牆,後乃能疾走.茲書之成,姑教之匍匐耳,扶牆徐行耳.若能疾走,則有代數微分諸書在,余將續梓之」.[48] 此爲移譯代微積拾級代數學之先聲.

○是年甘泉羅士琳客揚州,死於太平之難.

○善蘭甥崔敬昌,李壬叔徵君傳稱:「咸豐朝甘泉羅茗香(士琳)徵君,及歸安徐莊愍公(有壬)並以數學著.二公者與先舅父交最摯,郵遞問難,常朝覆而夕又至.先舅父爲之條分縷析,曲暢交通,如所問以報,恆累數千言,必使洞曉而後已」.[49]

○是年張文虎曾寄書與李壬叔問:「重學曾否

(48) 見偉烈亞力數學啓蒙序(1853).

(49) 見崔敬昌李壬叔徵君傳. 此傳載范溪李氏家乘,未刊. 杭州府志及海甯縣新志均採是傳.

授梓!微分法凡幾卷?」[50]

咸豐四年甲寅(1854),四十五歲.

○是年汪萊門人夏燮序刻汪萊遺著衡齋算學遺書合刻.[51]

○是年顧觀光作「用屢乘屢除求對數法」,「對數還原」,「對數衍」,并見算賸續編.

咸豐五年乙卯(1855),四十六歲.

是年善蘭遊滬瀆. 按張文虎「嘉興雜詩」,註稱:「乙卯(1855)九月偕錢叔保(熙哲)再寓幻居庵」,又註稱:「李善蘭壬叔昔館禾(嘉興)城,今遊滬瀆」.[52]

是年譯畢幾何原本後九卷.善蘭稱幾何原本後九卷「甫脫稿,韓君綠卿(應陛)寓書稱捐資上板,以廣流傳.卽以全稿寄之.顧君尙之(觀光),張君嘯山(文虎)任校覈,閱二年功竣,韓君復乞序之.[53]

海寧李壬叔善蘭與(張文虎)先生,讀算契合,咸豐初李先生從英吉利人艾約瑟偉烈亞力新譯重

(50) 見舒藝室尺牘偶存第15頁,上海文明書局本.

(51) 衡齋算學遺書合刻,聞梅舊塾藏版.

(52) 張文虎舒藝室詩存三第27–28頁.

(53) 見李善蘭幾何原本後九卷序. 同治四年(1865)刻本.

學及幾何原本後九卷.而艾約瑟輩深明算理格致之學,聞(張)先生名,數造訪質疑問難,咸大折服,謂爲彼國專家勿能及.(54)

○是年顧觀光著開方餘義.(55)

咸豐六年丙辰(1856),四十七歲.

○是年夏鸞翔序戴煦外切密率四卷及假數測圓二卷.(56)

咸豐七年丁巳(1857),四十八歲.

是年正月李善蘭及偉烈亞力(Wylie Alexander)序續譯幾何原本後九卷,是年二月婁縣韓應陛跋幾何原本後九卷.

○容閎(1828-1912)西學東漸記(1900)稱:「曾繼甫(譯音)君後又介予於中國之著名大算學家李君壬叔.予因李君又得識曾君國藩,曾君蓋中國之軍事家及政治家.予之教育計畫,後亦卒賴曾公力爲提倡,乃得實行.予嘗謂世上之事,殆如蛛網之牽絲.不能預定交友之中,究何人能解吾畢生

(54) 見繆荃孫「張文虎墓志銘」續碑傳集卷五十七,宣統庚戌(1910)繆荃孫自序,江楚編輯書局刋本.

(55) 武陵山人遺書,內算賸餘稿本.

(56) 見求表捷術,粵雅堂叢書本.

之結」即如予之因曾(繼甫)而識李(善蘭)因李而識曾(國藩),因曾而予之教育計畫,乃得告成,又因予之教育計畫告成,而中西學術,萃於一堂」.(57)

○是年七月番禺陳澧自序弧三角平視法一卷.

○是年夏鸞翔客都門,撰洞方術圖解二卷.

咸豐八年戊午(1858),四十九歲.

是年幾何原本刊行.(58)

是年冬李善蘭成火器眞訣一卷爲則古昔齋算學之十李善蘭序重學稱:「朝譯幾何,暮譯重學,閱二年同卒業,韓君綠卿(應陛)旣任刻幾何,錢君鼎卿(熙輔)亦請以重學付手民,同時上板,甫印行無幾,同燬於火」.(59)按閱二年當作閱四年.

○墨海教士(Rev. William Muirhead, 1822-1900)稱:「一八四八年或日,有一中國算學家攜其四年來所研究之微積學來見麥都斯博士(Dr. Medhurst)及墨海教士(Rev. W. Muirhead)謂曾從偉烈亞力(Wylie Alexander)受代數,幾何後九

(57) 見徐鳳石,惲鐵樵,譯容閎西學東漸記第48頁,上海商務印書館,民國四年(1915)十二月初版.

(58) 見李善蘭代微積拾級序.

(59) 序見同治五年李鴻章重刻重學二十卷前.

卷,三角,微積等科.且嘗譯侯失勒談天(Herschel's Outline of Astronomy),胡威立重學(Whewell's Mechanics),又着意從事奈端數理(Newton's Principia).當時從事此學之人雖少,而此君嘗介紹數人於教士.其一人爲江蘇顯宦,惜其信佛之心,過於信耶耳」.[60] 按此所云中國算學家,蓋指李善蘭;而顯宦則徐有壬也.其言一八四八當係一八五八年.因偉烈亞力(Wylie Alexander)於一八四七初來中國,且是時各書都未譯也.

咸豐九年己未(1859),五十歲.

是年孟夏善蘭序代微積拾級十八卷,由墨海刊行.代微積拾級題米利堅羅密士(Elias Loomis, 1811-1899)撰,英國偉烈亞力口譯,海寧李善蘭筆述.[61]

---

(60) 見 Rev. William Muirhand, China and the Gospel, pp. 193-194, 1870.

按格致彙編第三年春季號內傅蘭雅,"江南製造總局翻譯西書事略"(1880)謂此事在一八四五年亦屬誤記.

(61) 此書斯密斯博士疑出於 Elements of Algebra, N. Y. 1846 及 Element of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus, N. Y. 1850, 語見 Smith, D. E., and Mikami, Y. A.: History of Japanese Mathematics, p. 274. 然考代微積拾級譯本,實僅當羅密士1850之書,並未及1846本之代數學,書中"代"字是"代數幾何"(按 Analytical Geometry=Algebraic Geometry)之省稱.

是年夏六月烏程汪曰楨自序如積引蒙八卷,稱:「如積之術,爲西法借根方所從出.……余少讀之,不得其詳,既而見焦里堂(循)天元一釋,李壬叔(善蘭)四元解乃始稍稍解悟,誠算術之至巧至捷者也」.

是年重陽後八日李善蘭序談天於崑山舟次.

是年孟冬之月英國偉烈亞力(Wylie Alexander)序談天於春申浦上.

按談天十八卷,卷首一卷題英國侯失勒(Herschel)原本,英國偉烈亞力口譯,海寧李善蘭删述,無錫徐建寅續述.據談天凡例,則李譯乃據咸豐元年(1851)刻本而徐氏續述者,乃據同治十年(1871)重刻本也.

是年孟冬英國偉烈亞力序代數學十三卷.代數學題英國棣麽甘(Augustus De Morgan 1806–1871)撰,英國偉烈亞力口譯,海寧李善蘭筆受.

是年冬十一月金山錢熙輔序刻艾約瑟,李善蘭譯胡威立重學二十卷,由顧觀光,張文虎校.[62]又圓錐曲線三卷,題艾約瑟口譯,李善蘭筆受者,當亦成於此時.

(62) 跋見同治五年李鴻章重刻重學二十卷後.

觀前墨海教士(China and the Gospel)所記,奈端數理(Newton's Principia)之譯,當亦在此數年間.算學書目提要稱:「奈端數理四册,英國奈端撰,偉烈亞力傅蘭雅口譯,海寧李善蘭筆述.(丁福保)按是書分平圓,橢圓,拋物線,雙曲線各類.橢圓以下,尚未譯出,其已譯者,亦未加删潤.往往有四五十字爲一句者,理既奥頤,文又難讀.……後爲大同書局借去,今不可究詰.……」[63]

傅蘭雅主編格致彙編稱:「李善蘭與偉烈亞力譯奈端數理數十頁,後在翻譯館內,與傅蘭雅譯成第一卷;共三册,原書共八册.[64]

咸豐十年庚申(1860),五十一歲.

是年夏婁縣韓應陛卒.按張文虎讀有用書齋雜著序稱:「……西點線面積之學,莫善於幾何原本.凡十五卷,明萬歷間利瑪竇(Ricci Matteo)所譯止前六卷.近歲英吉利末士偉烈亞力續譯後九卷.海寧李壬叔寫而傳之.(韓應陛)君反復審訂,授之剞劂.…

(63) 見丁福保,算學書目提要,卷中第14頁,光緒己亥(1899)無錫埃實學堂刻.

(64) 見格致彙編第三年卷,「江南製造總局繙譯西書事略」(1880).

(咸豐)十年(1860)夏……病死」.[65]

(咸豐)十年(1860)李善蘭在莊愍(徐有壬)幕.[66]「善蘭……輒復著書,久之得若干種,咸豐庚申(1860)在蘇州署,遭亂盡失之.[67]

〇是年戴煦(1805-1860)[68]卒.戴煦有求表捷術共四種九卷,未刻者又有若干種.

咸豐十一年辛酉(1861),五十二歲.

是年吳嘉善至上海,與善蘭論當世算家,善蘭極推顧觀光.[69]

〇是年顧觀光撰對數術一卷.

〇是年時曰醇自序百雞術衍一卷.

同治元年壬戌(1862),五十三歲.

是年初春錢塘夏鸞翔自序萬象一原九卷,中有演代微積拾級術.

是年顧觀光(1799-1862)卒.顧觀光有武陵山人遺書八種九卷,九數存古九卷.觀光「疾將終,以所著

(65) 見張文虎舒藝室雜著乙編,卷上,第34頁.

(66) 見諸可寶疇人傳三編,卷六,光緒十二年(1886).

(67) 見李善蘭則古昔齋算學自序.同治丁卯(1867)金陵刻本.

(68) 見伍崇曜求表捷術跋,粵雅堂叢書本.

(69) 見武陵山人遺書內算賸初編序.

書,屬長子深曰,求爾師爲我傳,及李壬叔序之遂無他言,卒年六十四」.[70]

是年十月吳縣馮桂芬自序西算新法直解八卷於滬城北郊寓舍.是書乃演代微積拾級說也.

按李善蘭在滬時,劉彝程曾晤之.劉彝程簡易庵算稿自序稱:「……識李君壬叔於滬濱,由是悉心於弧矢級數之學,不數年自著割圜闡率一卷(1869),對數問答[71]數種」是也.

○是年三月吳嘉善序割圜八線綴術四卷.

○是年六月宜賓汪香祖自序衍元筆算今式二卷.

○是年秋南豐吳嘉善序長沙李錫蕃遺著借根方句股細草一卷.

○是年八月總理衙門王大臣奏設同文館於京師.[72]

同治二年癸亥(1863),五十四歲.

(70) 見張文虎"顧尙之別傳",武陵山人遺書本,或張文虎舒藝室雜著甲編本.

(71) 卽對數四問,經世文編本.

(72) 見京師同文館學友會第一次報告書,京華印書局代印,民國五年(1916)三月.

曾國藩稱是年五月李善蘭壬叔,楊峴見山來坐,攜陳碩甫先生奂片一紙,知已由賊中逃出到滬,言將來皖,年八十二歲,段茂堂之弟子,東南之精於經學小學,巋然僅存矣.[73]

曾國藩稱是年五月李壬叔帶來二人,一張斯桂號魯生,浙江蕭山人,工於製造洋器之法.一張文虎江蘇南匯人,精於算法,兼通經學小學,爲阮文達公所器賞.[74]

王韜稱:「海昌李壬叔茂才名善蘭,一字秋紉,… 咸豐壬子來滬,… 在滬十年,… 同治初年曾滌生相國開府兩江,徵至幕中,自此蹤跡遂與闊絕矣.[75]

是年夏(五月)張文虎自滬至皖,時善蘭已從軍安慶.[76]在皖所居賓館,在南城任家坡,爲節相內軍械所,時與李善蘭張文虎同居者,有華蘅芳徐壽等.[77]李善蘭在安慶,與莫友芝,鄧瑤,張文虎,孫衣言,周學

(73) 求闕齋日記卷九.

(74) 求闕齋日記卷九.

(75) 見王韜瀛壖雜志卷四.

(76) 見張文虎「送壬叔以算學徵入同文館」詩,舒藝室詩存六,第14頁.

(77) 見張文虎「雜詩」,舒藝室詩存五,第13頁.

濬,方宗誠,方駿謨等,常過從錢泰吉寓.(78)

是年東坡生日以十四人集周縵雲侍郎學濬蟄庵共賦詩.(79)李善蘭與張斯桂對奕,屢敗,而竟苦戰不已.(80)

是年某月及七月李善蘭作書約容閎入曾國藩幕.西學東漸記稱:「一八六三年余(容閎自稱)營業九江,某日,忽有自安徽省城致書於余者,署名張斯桂…彼自言承總督(曾國藩)之命,邀余至安慶一行.總督聞余名,亟思一見,故特作此書云…… 兩閱月後,張君之第二函至,囑予速往.並附李君善蘭(即壬叔)一書.李君亦予在滬時所識者.此君爲中國算學大家,曾助倫敦傳道會教士偉烈亞力(Rev. Wylie Alexander)譯算學書甚夥,中有微積學,即予前在耶路大學二年級時,所視爲畏途,而每試不能及格者…七月間予復得張君之第三函,及李君之第二函,兩函述文正之意,言之甚悉.謂總督欲予棄商業而入政界.居其屬下任事.(81)

(78) 見錢警石年譜.(裘沖曼徵訪)

(79) 見張文虎舒藝室詩存五,第33頁,及第17頁.

(80) 見張文虎舒藝室詩存五,第11頁.

(81) 見西學東漸記第81-83頁. 惟譯本誤以張斯桂爲張世貴.

是年九月容閎抵安慶,逕赴文正大營,得晤故人張斯桂,李善蘭,華若汀(蘅芳)徐雪村(壽)等,此數人皆予(容閎自稱),上海舊交相識,見予至,意良欣慰.[82]

丁取忠同治十一年(1872)算學二十一種序稱:「癸亥(1863)曾以活字印十數種」.又同書凡例稱:「原書印後,博求四方通算士,互相考正.海寧李壬叔先生(善蘭)校正居多.[83]

同治三年甲子(1864),五十五歲

善蘭自稱:「歲甲子來金陵晤曾沅浦中丞,許代付手民」,[84]此爲刻印則古昔齋算學十三種之動機。

是年二月漢陽劉世仲跋李善蘭則古昔齋算學.[85]

是年李善蘭張文虎並來南京,入城訪朝天宮,見飛霞閣在朝天宮大殿左,僅存牆壁甍榱.官紳議以宮址改建郡學,竣事後移書局於此,李善蘭張文虎等並居之.[86]

---

(82) 西學東漸記,第84頁.

(83) 見白芙堂算學叢書內"算學二十一種",序及凡例.

(84) 見李善蘭則古昔齋算學自序,同治丁卯(1867)金陵刻本.

(85) 見李善蘭則古昔齋算學跋,同治丁卯(1867)金陵刻本.

(86) 見張文虎,舒藝室詩存五,第32頁;及詩存六,第4頁.

同治四年乙丑(1865),五十六歲.

是年十月張文虎代曾國藩作幾何原本序稱:「咸豐間海寧李壬叔始與西士偉烈亞力續譯其後九卷.復爲之訂其舛誤,此書遂爲完帙,松江韓中翰嘗刻之,印行無幾,而板燬於寇.壬叔從余安慶軍中,以是書示余曰:此算學家不可少之書,失今不刻復絕矣.會余移駐金陵,因屬壬叔取後九卷重校付刻.繼思無前六卷則初學無由得其蹊徑,而亂後書籍蕩泯.天學初函世亦稀覯.近時(1847)廣東海山仙館刻本,紕繆實多,貽誤來學,因并取六卷者屬校刊之」.[87] 按金陵刻本幾何原本由曾國藩署簽,張文虎覆校.

〇是年六月郭嵩燾序馮桂芬西算新法直解八卷於嶺南節署.

同治五年丙寅(1866),五十七歲.

是年曾國藩郵致三百金爲李善蘭刻算書.[88]

是年九月李善蘭自序重學稱:「今湘鄉相國(曾國藩)爲重刊幾何,而制軍肅毅伯(李鴻章)亦爲重刻重學,

(87) 見張文虎舒藝室雜著甲編卷下第5-6頁,及幾何原本十五卷本,序第12頁.

(88) 見李善蘭則古昔齋算學自序.

又同時復行於世.[89]

○是年同文館創設天文,算學等科,以七年爲期.[90]

席淦殘稿稱:「同治五年(1866)郭筠仙(嵩燾)侍郎特疏薦(李善蘭)」.

張文虎「送王叔以算學徵入同文館」詩,亦註稱:「前廣東巡撫郭中丞,始以君名入告」.[91]

同治六年丁卯(1867),五十八歲.

是年春獨山莫友芝爲李善蘭則古昔齋算學署檢.

是年九月李善蘭自序則古昔齋算學十三種,計:方圓闡幽一卷,弧矢啓祕二卷,對數探源二卷,垛積比類四卷,四元解二卷,麟德術解三卷,橢圓正術解二卷,橢圓新術一卷,橢圓拾遺三卷,火器眞訣一卷,尖錐變法解一卷,級數回求一卷,天算或問一卷,共二十四卷.[92]

就中南海馮焌光校方圓闡幽(1851刻)

(89) 見同治五年重刻重學二十卷附曲線說三卷前.

(90) 見京師同文館學友會第一次報告書,京華印書局代印,民國五年(1916)三月.

(91) 見張文虎舒藝室詩序六,第14頁.

(92) 見李善蘭則古昔齋算學自序,同治丁卯(1867)金陵刻本.

南匯張文虎校弧矢啓祕(1851刻)

南匯賈步緯校對數探源(1850刻)

湘鄉曾紀澤校垜積比類

湘鄉曾紀鴻校四元解(1845)

烏程汪曰楨校麟德術解(1848)

江寧汪士鐸校橢圜正術解

無錫徐壽校橢圜新術

無錫華蘅芳校橢圜拾遺

上元孫文川校火器眞訣(1858)

南豐吳嘉善校尖錐變法解

無錫徐建寅校級數回求

長沙丁取忠校天算或問

李儼藏有李善蘭遺墨,則古堂算學目錄一紙,計:方圓闡幽三卷,弧矢別徑三卷,對數探原三卷,垜積圖譜五卷,海鏡別解五卷,四元解二卷,數學一得十卷,十三經算術十三卷,開方圖法十卷,四元啓蒙四卷,授時術細草七卷,回回術細草七卷,時憲術細草十四卷,海鏡廣十二卷,日晷解三卷,橢圓捷法三卷.附註謂:今日爲始,十年爲期,必成此多種,以上報天地.

善蘭所著書,在則古昔齋算學外者,有:

九容圖表七頁在劉鐸古今算學叢書之內.

測圓海鏡解一卷,有傳鈔本.(93)

考數根法三卷,造整數句股級數法二卷.(94)

偉烈亞力稱:「李氏精思四載,乃得對數理.倘生於訥氏,蓋氏之時,則祇此一端,卽可名聞於世」.(95)

同治七年戊辰(1868),五十九歲.

美國丁韙良於光緖丁丑(1877)「李壬叔先生序」稱:「李壬叔……總署延爲同文館算學教習,在京授算法,於玆八載.(96)

王韜瀛壖雜志卷四註稱:(壬叔以同治戊辰入都爲天文館總教習).(97)

同治七年因湘陰郭侍郎(嵩燾)薦舉,徵(李善蘭)入同文館,(曾)文正資送之.(98)

(93) 李儼藏傳鈔本測圓海鏡解凡一卷.

(94) 語見席淦遺稿,及崔敬昌,李壬叔徵君傳. 按中西聞見錄之內,有考數根四法一卷. 又造整數句股級數法二卷亦作級數句股二卷.

(95) Wylie Alexander, Chinese Research, p. 194. Shanghai, 1897.

(96) 見格致彙編第二年夏季册,西曆1877年出版.

(97) 見王韜,瀛壖雜志卷四.

(98) 見諸可寶,疇人傳三編卷六.

同治八年己巳(1869),六十歲.

席淦「抱膝居士遺稿」稱:「李壬叔師天算,集中西大成,己巳年應詔來都,掌教天文館,余從游十餘年.……」[99]

李善蘭甥崔敬昌稱:「總理衙門設天文算學館,議舉主政者郭筠仙侍郎以舅父應.同治八年奉召入都,欽賜中書科中書.洊保四品銜,戶部廣東司郎中.在館教習,諸生先後約百餘人.口講指畫,十餘年如一日」.[100]

按李善蘭入京之年或作戊辰(1868),或作己巳(1869),惟比較以戊辰年入京爲可信.

○是年五月鄒伯奇(1819-1869)卒.鄒伯奇有鄒徵君遺書八種,九卷.

○是年劉彝程自序割圜闡率,一卷.

○是年曾國藩入江南製造局爲督辦.[101]

同治九年庚午(1870),六十一歲.

○是年江南製造局印英傅蘭雅譯,英白起德著,

(99) 見席翰伯先生遺像家刻本.

(100) 見崔敬昌李壬叔徵君傳.

(101) 見魏允江南製造局記卷六,第40頁,光緒三十一年(1905)九月,上海文寶書局石印.

運規約指三卷一本.[102]

同治十年辛未(1871),六十二歲.

○是年秋楊兆鋆年十八,入同文館,受算學於李善蘭凡六年.[103]

○是年孟秋丁取忠序粟布演草稱撰此書時曾函詢海寧李君壬叔(善蘭),君示以廉法表及求總率二術,而其理始顯.厥後吳君(嘉善)又示以指數表及開方式,李君復為之圖解,以闡其義,由是三事互求,理歸一貫.[104] 按白芙堂叢書本粟布演草一題「海寧李善蘭壬叔,南豐吳嘉善子登,湘鄉曾紀鴻栗誠演:長沙丁取忠雲梧,湘陰左潛壬叟同述」是也.

同治十一年壬申(1872),六十三歲.

是年二月善蘭序金匱華蘅芳開方別術,此是為行素軒算稿之一.[105]

---

(102) 見魏允江南製造局記卷二,"建置表,"圖書附,第20頁.

(103) 見楊兆鋆須曼精廬算學序,吳興劉氏嘉業堂刊本.

(104) 見粟布演草,白芙堂叢書本.

(105) 見行素軒算稿,光緒壬午(1882)自刻本.

同治十二年癸酉(1873),六十四歲.

○是年席淦充同文館副教習.(106)

○是年長沙丁取忠序嘉定時曰醇求一術指一卷.(107)

○是年吳縣潘祖蔭,南豐吳嘉善序南昌梅啓照學彊恕齋筆算十卷.(108)

○是年華蘅芳,徐壽,徐建寅等入江南製造局爲提調.(109)

○是年左潛序割圜八線綴術四卷.此書以本年秋刻於荷池精舍.

○是年十月華蘅芳序代數術二十五卷,是書題英國華里司輯,英國傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述.

○是年冬十二月,左潛自序綴術釋戴一卷.

同治十三年甲戌(1874),六十五歲.

---

(106) 見席翰伯先生遺像,家刻本.

(107) 見求一術指同治十二年(1872)長沙刻本.

(108) 見學彊恕齋筆算,序第1-4頁,光緒壬午(1882)重刻本.

(109) 見江南製造局記卷六,職官表,第41頁.

時善蘭在京同文館.[110]

善蘭在京,曾患風痺,憚於行遠.咫尺之遙,須人扶掖.是殆晚歲體肥之故歟![111] 善蘭與顧觀光,張文虎皆體肥.英人艾約瑟嘗曰:「吾西國爲算學者多瘦,君輩何獨不爾!」[112]

○是年春長沙丁取忠自序對數詳解五卷,稱:「對數一術乃西士所稱爲至簡者,而近日海寧李壬叔善蘭,南海鄒特夫伯奇皆創立新法,較西人舊法簡易數倍」.[113]

○是年夏左潛序黃宗憲求一術通解二卷.

○是年夏四月丁取忠識數學拾遺,又同書「求又形弧角解」稱:「昔年編輯吳子登氏算書二十一種,其斜弧三角術表云採徐君卿(有壬)法.及考其第一術第二表卽有與徐氏互異者,因函詢李壬叔氏,李氏爲之圖解,極爲明晰,故存之以爲言弧角之一助」.[114]

(110) 見長沙嚴家罍序湘鄉周廣詢算學入門,光緒丙申(1896)周氏自刊本.

(111) 見王韜弢園尺牘卷八,"與李壬叔書"中語.

(112) 見張文虎舒藝室詩存三,第28頁.

(113) 見對數詳解,白芙堂叢書本.

(114) 見丁取忠數學拾遺,白芙堂算學叢書本.

○是年賈步緯校顧觀光九數外錄一卷一本,劉彝程校傅蘭雅,華蘅芳譯英華里司代數術二十五卷,六本;微積溯源八卷,六本;賈步緯校,賈步緯八線簡表一卷一本,由江南製造局印行.(115)

○是年九月金匱華蘅芳自序所譯微積溯源八卷,稱:「先是咸豐年間曾有海寧李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書,流播海內,余素與壬叔相友,得讀其書,粗明微積二術之梗概.所以又譯此書者,蓋欲補其所略也」.

○是年丁取忠序曾紀鴻圜率眞圖解一卷.

光緒元年乙亥(1875),六十六歲.

是年九月張之洞編書目答問,卷後附有「清朝著述諸家姓名略」,其「算學家」條下註稱:〔五十年來爲此學者甚多,此舉其著述最顯著者;梅文鼎,羅(士琳)李善蘭爲最〕.又註稱:(此編生存人不錄,李善蘭乃生存者.以天算爲絕學,故錄一人).

○是年孟冬湘鄉曾紀鴻序綴術釋明二卷.稱:「董(方立)明(靜庵)二君均爲弧矢不祧之宗,無庸軒輊其間,迺百年中繼起者如戴鄂士煦,徐君靑有壬,

(115) 見江南製造局記卷二,第19頁.

李壬叔善蘭所著各書,雖自出新裁,要皆奉董明爲師資也……」

光緒二年丙子(1876),六十七歲.

是年十月李善蘭序李治測圓海鏡細草十二卷,由同文館鉛版印行.善蘭序稱:「善蘭少習九章,以爲淺近無味.及(應試武林),得讀此(測圓海鏡)書,然後知算學之精深,遂好之至今.後譯西國代數,微分積分諸書,信筆直書,了無疑義者,此書之力焉.蓋諸西法之理,卽立天元一之理也.今來同文館,卽以此課諸生,今以代數演之,則合中西爲一法矣」.

○是年廣方言館設於上海城內,八年移入江南製造局.(116)

○是年孟春月丁取忠跋四象假令細草.(117)

光緒三年丁丑(1877),六十八歲.

是年美國丁韙良「李壬叔先生序」稱:「(善蘭)在京授算法,於兹八載(1870–1877)…… 年逾六旬,頗憂乏嗣.……」(118)

(116) 見江南製造局記卷二,第14頁.

(117) 附白芙堂叢書本四元玉鑑後.

(118) 見格致彙編第二年,夏季册,西曆1877年出版.

是年傅蘭雅編格致彙編第二年夏季四卷,載有李善蘭演代數難題卷十三,第四次考題.相傳此題爲英國大書院內之人包爾所出.出此題時,許人能解此題者,贈以金錢一百.

○是年劉彝程校傅蘭雅,華蘅芳譯,英海麻士(原名不詳,Hymers?)三角數理十二卷六本.(119)

○是年江南製造局刻傅蘭雅江衡譯,英哈章算式集要四卷.(120)

光緒四年戊寅(1878),六十九歲.

○是年賈步緯校梅穀成增删算法統宗十一卷四本,由江南製造局印行.(121)

○是年宋演句股一貫述六卷,刻於渝州.

光緒五年己卯(1879),七十歲.

○是年春二月南昌梅啓照序海寧陳其晉對數述四卷.(122)

○是年烏程汪曰楨序錢孔福所刻張作楠翠薇山房數學.

(119) 見江南製造局記卷二,第19頁.

(120) 見格致彙編第三年,春季册.

(121) 見江南製造局記卷二,第19頁.

(122) 見對數述,光緒丙申(1896)石印本.

○是年江南製造局刻董祐誠董方立遺書一卷二本,及江衡校傅蘭雅趙元益譯英棣麼甘(Augustus De Morgan)數學理九卷四本.[123]

光緒六年庚辰(1880),七十一歲.

是年正月同文館同人公壽李善蘭.[124]

是年三月美國丁韙良序同文館算學課藝四卷.

此書題「同文館算學教習李壬叔先生閱定,副教習席淦(1845-1917),貴榮編次;肄業生陳壽田,胡玉麟,熊方柏,李逢春同校」.演課題者,有:陳壽田(已故)汪鳳藻(1851-1918),貴榮(已故)胡玉麟(已故)席淦,楊兆鋆(1854-?),……[125]

○是年華蘅芳自識開方古義二卷,此爲行素軒算稿之二.[126]

○是年江南製造局設「繙譯館」,翻譯格致化學製造各書.[127]

---

(123) 見江南製造局記卷二,第19頁.

(124) 見席淦殘稿.

(125) 其稱已故者乃據京師同文館學友會第一次報告書.

(126) 見行素軒算稿,光緒壬午(1882)自刻本.

(127) 見江南製造局記卷二,第14頁.

光緒八年壬午(1882)七十三歲.

海寧州志稿稱:「善蘭於光緒壬午,年七十三,病卒於官」.張鳴珂疑年賡錄卷二稱「李壬叔七十三善蘭……卒光緒八年壬午」.

按杭州府志作「光緒十年卒官」及疇人傳三編作「光緒十年卒於官,年垂七十矣」者,並誤.

席淦殘稿稱「李善蘭十月二十九日卒」.

李善蘭墓在浙江海寧縣牽罾橋東北.(據管茂才元耀言).[128]崔敬昌稱:「光緒八年冬十月,偶示微疾,越日逝.是年之夏,猶手著級數句股二卷,老尚勤學如此.歿後周小棠(家楣)侍郎囑開其事實,奏請宣付史館立傳,嗣周侍郎薨於位,未果.然先舅父爲一代疇人,他日必有繼周侍郎而請於朝者」.[129]

李善蘭卒無後,以甥崔敬昌爲繼.崔字吟梅,民國六年(1917)年已六十餘.曾任江海關文案,所居在硤石鎮,爲李壬叔先生舊居.(據費孝廉寅言).

(128) 民國六年(1917)據海寧縣公立圖書館長朱尙(字蒼)君轉述.

(129) 見崔敬昌李壬叔徵君傳.